SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

2
GOD. XI.

ZAGREB
1960 – 61

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u četiri broja po 40—48 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.

Pretplata za 4 broja iznosi Din 300.—. — Pojedini se broj prodaje po Din 75.—. Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 400-73-5-1884. — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST
ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA XI.
BROJ 2

ZAGREB

ŠKOL. GOD.
1960. — 1961.

О геометријским конструкцијама са неприступачним елементима

МОМЧИЛО КОСМАЈАЦ, Цетиње

Општа теорија геометријских конструкција помоћу лењира и шестара, обично се заснива на чињеницама да се кроз двије различите тачке може поставити права, затим да се може добити тачка као пресјек двију правих (наравно све ово помоћу лењира) и да се помоћу шестара може конструисати круг, ако му је познат положај његовог центра и величина његовог полупречника.

У пракси ове чињенице могу, али не морају бити испуњене. За решавање специјалних типова задатака служимо се разноврсним картама различитих размјера и помоћу њих одређујемо тражене елементе одговарајућих фигура. Са оваквим задацима и начином решавања врло често се сретају на терену инжињери и техничари. На терену при мјерењима и конструкцијама немогуће је у сваку тачку поставити геодетски инструмент и сваки праволинијски пут није приступачан, тј. поједини елементи на том путу су неприступачни. У вези са тим околностима поникла је и развила се математичка теорија геометријских конструкција са неприступачним елементима која данас игра необично важну улогу у практичној геометрији, па је стога и нормално да се наши средњошколци упознају са основама те теорије, јер мјерењима на терену новим програмима за основну школу, а самим тим и за гимназије дато је право мјесто.

Још 1774. г. швајцарски математичар I. H. Lambert* у књизи »Слободна перспектива« дао је решења неких простијих конструктивних задатака са неприступачним елементима. Од тада па до данас та теорија се развијала, тако да она сада претставља једну изграђену грану геометрије, помоћу које практичари лако решавају задатке на терену.

Појавом неприступачних елемената у разним задацима мијења се обично поступак геометријског решавања таквих задатака и ток решавања је нешто компликованији од уобичајеног.

У овом чланку биће говора о решавању таквих задатака и то само оних који су у вези са познатом материјом из планиметрије, јер систематско излагање теорије геометријских конструкција са неприступачним елементима захтијева солидно познавање основних теорема пројективне геометрије (особине потпуног четвороугла, Desargues-ovu** теорему, Papo*-Pascal-ovu*** теорему, особине поларе и др.)

* I. H. Lambert (1728—1777 г.) је познат по свом прилогу о паралелним линијама у својој »Теорији паралелних линија«.

* Papo из Александрије (III вијек прије наше ере).

** Desargues (1593 — 1662) је француски математичар, који је познат у пројективној геометрији по својој теореми.

*** Pascal B. (1623—1662) је француски математичар.

Прије него пређемо на саме задатке упознаћемо се са извјесним аксиомама и дефиницијама.

Дефиниција 1.

Тачка је »неприступачна«, ако је над њом немогуће примијенити аксиоме конструктивне геометрије, тј. аксиоме лењира и шестара.

Аксиома лењира.

Лењиром је могуће извести следеће конструкције:

а) конструисати дуж спајајући двије различите сталне тачке;

в) конструисати праву која пролази кроз двије сталне тачке;

с) конструисати полуправу (зрак) која излази из дате тачке а пролази кроз другу тачку.

Аксиома шестара.

Шестаром се могу извести следеће конструкције:

а) конструисати круг ако је дат центар круга и његов полупречник

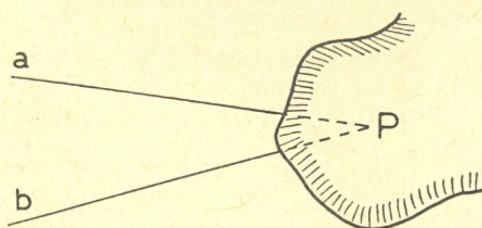
в) конструисати сваки од два допунска лука круга, ако су дати његов центар и крајеви тих лукова.

Дефиниција 2.

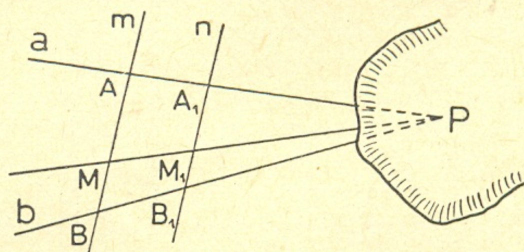
Геометриска фигура је »неприступачна«, ако су све њене тачке неприступачне.

Дефиниција 3.

За неприступачну тачку каже се да је позната, ако су конструисане двије праве које њоме пролазе. (сл. 1).



Сл. 1



Сл. 2

Ако је неприступачна тачка P позната означавамо је са P (a, b), јер је одређена правима a и b. (види сл. 1).

А сада ево неколико задатака са неприступачним елементима.

Задатак 1.

Кроз дату тачку M поставити праву MP, ако је тачка P (a, b) позната неприступачна тачка (сл. 2).

Решење:

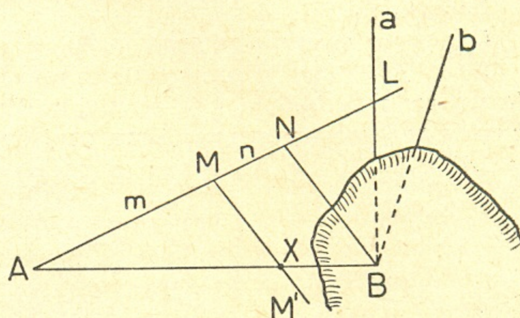
Кроз тачку M поставимо било коју праву m која сијече дате праве a и b у одговарајућим тачкама A и B. Осим ње поставимо још једну праву $n \parallel m$, тако да она сијече a и b у тачкама A_1 и B_1. Нађимо такву тачку M_1 да она дијели дуж $\overline{A_1B_1}$ у истом односу у којем тачка M дијели дуж $\overline{AB}$, т. ј. нека је $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{A_1M_1} : \overline{M_1B_1}$. Тада је права MM_1 тражена права, тј. она мора пролазити кроз P. (Објасни на основу чега).

Задатак 2.

Подијелити у датом односу $m : n$ (m и n су мјерни бројеви датих дужи) дуж $\overline{AB}$, ако је један од њених крајева (на пр. B) неприступачан. (сл. 3).

Решење:

Поставимо кроз A полуправу AL, као што је на сл. 3 и пренесимо на њу $AM = m$, $MN = n$. Конструишимо праву BN (аналогно зад. 1) и поставимо кроз M праву $MM' \parallel BN$. Права MM' сијече $\overline{AB}$ у тачки X, т. ј. $AX : XB = m : n$.



Сл. 3

Ова конструкција је изводљива и у случају када су оба краја дужи $\overline{AB}$ неприступачна. У том случају ван дужи $\overline{AB}$ одабере се произвољна тачка N, дуж $\overline{AN}$ дијели се у датом односу према наведеном поступку, а затим се враћамо на већ описану конструкцију.

Задатак 3.

Дате су три тачке A, B и C које леже на једној правој a, при чему је тачка C неприступачна. Наћи такве отсјечке m и n, да би однос $AC : BC$ био једнак односу $m : n$. (сл. 4).

Решење:

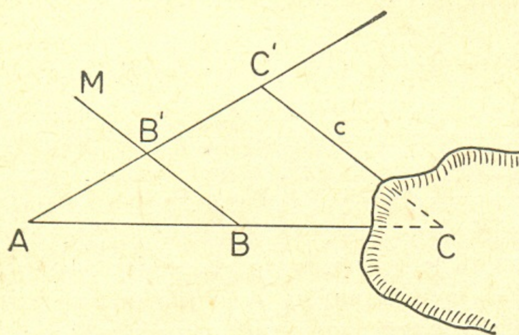
Нека је C' произвољна тачка на правој c, која пролази кроз неприступачну тачку C. Поставимо $BM \parallel CC'$. Нека права BM сијече AC' у тачки B'. Тада је јасно да имамо већ тражени однос $AC : BC = AC' : B'C' = m : n$. (зашто?).

Задатак 4.

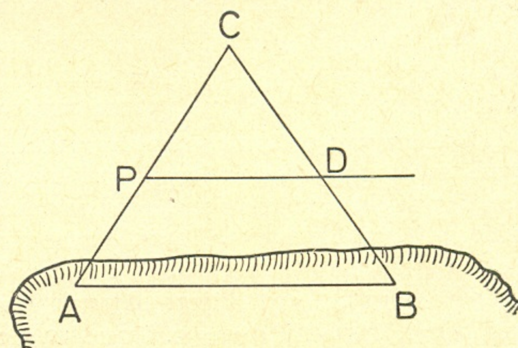
A и B су двије познате неприступачне тачке. Кроз дату тачку P поставити праву паралелно правој AB. (сл. 5).

Решење:

Конструишимо праву PA (слично задатку 1). Нека је C произвољна тачка праве PA. Одредимо однос $AC : PC$ (слично задатку 3). Подијелимо дуж BC тачком D у том односу истом (слично задатку 2). Тада је права PD тражена



Сл. 4



Сл. 5

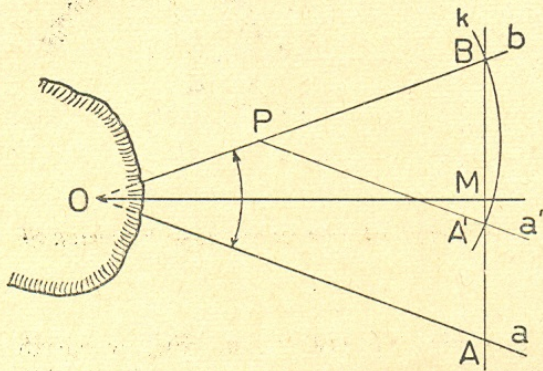
права, јер је $\Delta PDC \sim \Delta ABC$, пошто исти имају заједнички угао код C и стране су им пропорционалне, тј. $AC : PC = BC : DC$, то права PD мора бити паралелна са AB.

На овај задатак лако се своди задатак о конструкцији нормале кроз дату тачку у односу на дату праву која пролази кроз двије познате неприступачне тачке.

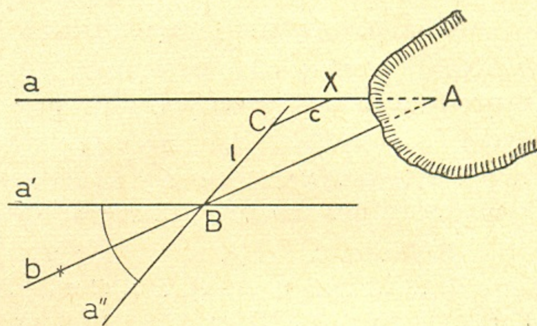
Задатак 5.

Одредити симетралу угла (a, b), ако је његово тјеме неприступачно (сл. 6).

Нека је P (сл. 6) произвољна тачка на правој b. Конструишимо праву a' која пролази кроз P, а || је правој a. Из тачке P као центра опишемо круг k произвољног полупречника. Нека овај сијече праве a' и b у одговарајућим тачкама A' и B. Права AB гради са датим правима a и b једнаке углове, јер она



Сл. 6



Сл. 7

пролази кроз A', а PA' || са OA, а осим тога и $PA' = PB$, тј. $\Delta\ A'PB$ је равнокраки, а самим тим и $\Delta\ AOB$ са врхом у O-тјеме датог угла. На основу тога тражена симетрала мора пролазити кроз средину M дужи $AB \perp$ на њој.

Задатак 6.

На датој правој a пренијети од извјесне неприступачне тачке A дуж једнаку датој дужи. (сл. 7).

Решење:

Нека је b (сл. 7) друга права која одређује неприступачну тачку A. Одаберимо на правој b произвољну тачку B и поставимо кроз њу праву a' || a. Конструишимо праву a'' симетрично a' у односу на b, и на њу пренесимо дату дуж $BC = l$. Ако је c права || правој b, а пролази кроз C, то је тачка X, тј. $AX = l$. Трапез $ABCX$ је равнокраки, јер су углови на његовим основама једнаки.

Из ових наведених примјера, види се да оваквих и њима сличних задатака има приличан број, и да сами можемо створити задатке комбинујући наведене примјере конструктивних задатака са неприступачним елементима.

Врло често се при решавању конструктивних задатака са неприступачним елементима примјењују геометријске трансформације. Ако тада геометријска трансформација не преводи дату неприступачну тачку у саму себе, то се за њу каже да је приступачна. Послије примијењене трансформације задатак се обично решава познатим методама. Послије тога, када је добијено одговарајуће решење, остаје да се примијени обрнута трансформација да би добили решење за првобитни положај фигуре. Ради илустрације трансформација навешћемо два примјера.

Задатак 7.

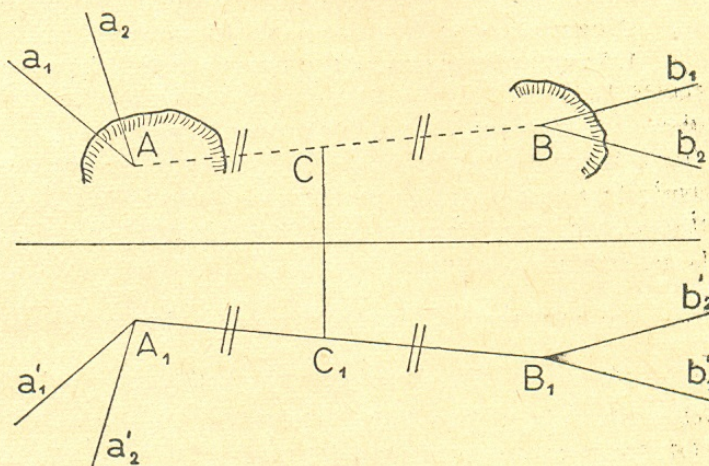
Конструисати средину дужи AB, ако су A (a_1, a_2) и B (b_1, b_2) двије неприприступачне тачке.

Примијенимо методу симетрије.

Нека је s (сл. 8) произвољна права коју узимамо за осу симетрије.

Конструишимо праве a'_1, a'_2 b'_1 и b'_2 симетрично правима a_1, a_2, b_1 и b_2 у односу на праву s. Нека је $a'_1 \times a'_2 = A'_1$, $b'_1 \times b'_2 = B_1$. Конструишимо сре-

дину дужи A_1B_1, тј. тачку C'_1. Тачка C симетрична тачки C'_1 у односу на s је тражена тачка, јер је једнакост дужи при симетрији сачувана при чему је два пута поновљена симетрија идентична трансформација.



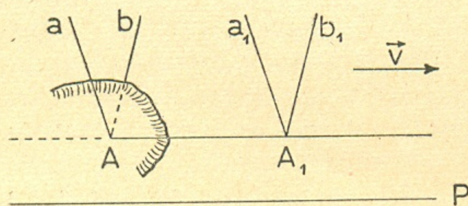
Сл. 8

Понекад није потребно изводити обрнуту трансформацију као што је то очевидно из следећег примјера.

Задатак 8.

Кроз дату неприступачну тачку A (a и b) поставити праву, паралелну датој правој p.

Изведимо паралелно помјерање дате фигуре у смјеру неког вектора $\vec{V}$, који је колинеаран правој p. Праве a и b преображавају се при томе у одговарајуће праве a'_1 и b'_1. Нека је (сл. 9) $a_1 \times b_1 = A_1$. Права постављена кроз $A_1 \parallel p$ је тражена права.



Сл. 9

Како у пракси, при цртању, увијек имамо посла не са читавом равни, него с њеним ограниченим дијелом, њеном облашћу (лист за цртање), то се овдје онда појављују задаци — конструктивни задаци на ограниченом дијелу равни, гдје остали дио равни схватимо као неприступачан. У тим случајевима особито је корисна трансформација хомотетија, јер она омогућава »сажимање« цијелог цртежа у произвољном односу. При одговарајућем избору центра и коефицијената хомотетије може се добити да се све произвољно далеке неприступачне тачке равни преображавају у тачке, распоређене у границама датога дијела равни.

Elektronska računala (analogna)

JURAJ BOŽIČEVIĆ, Zagreb

Uvod. Počeci računskih naprava datiraju iz doba starog Egipta i Babilona. Iz tog vremena potječe prvo računalo — abacus, koje se razvilo iz računanja s kamenčićima. Prvi mehanički uređaj za računanje sastavio je 1642. god. Blaise Pascal. Bio je to uređaj koji je pomoću kombinacije zupčanika vršio zbrajanje i odbjanje i od tada usporedo sa razvojem nauke, ide i razvoj računskih uređaja. Bili su to sve mehanički uređaji. Prvi električki uređaj — analizator sa otporničkim elementima, izradile su 1925. god. Westinghouse Company i General Electric Company (USA) za analizu istosmjernih naponskih mreža. Tek 1944. god. izgrađeno je prvo potpuno elektronsko računalo — ENIAC u Moore Schol of Engineering u USA.

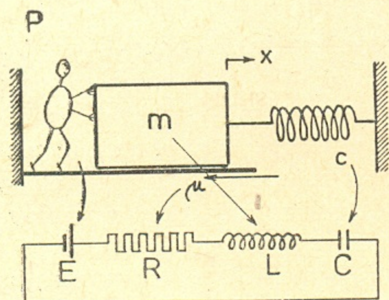
Danas, iako od izgradnje prvog elektronskog računala nisu prošla niti dva decenija, moderna se nauka ne može zamisliti bez njih.

Razlikujemo dvije glavne grupe računala — d i g i t a l n a, koja rade na brojčanim podacima i a n a l o g n a, koja rade sa kontinuiranim fizikalnim funkcijama. Uz to ima: kombinacija ovih tj. analogno-digitalna računala.

U ovom članku ćemo se osvrnuti samo na rad elektronskih analognih računala.

1. Prva analogna računska naprvava je integrator, izum Jamesa Thomsona, brata Lorda Kelvina. Kasnije je taj izum upotrebio Lord Kelvin u svojoj napravi za harmonijsku sintezu. Razvoj elektronskih analognih računala omogućio je tek pronalazak istosmjernog pojačala, koje u ovom računalu služi kao radno pojačalo. Prvi uspjesi na tom području postignuti su oko 1938. god. u laboratorijima Geo. A, Philbric Researches, Inc. Kasnije se pojavljuje čitav niz elektronskih računala pod raznim komercijalnim nazivima kao BOEING, EASE GAP/R, REAC i dr.

Promotrimo li Newtonov zakon gibanja $P = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$, a u elektriciteti zakon $E = -L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$, vidjet ćemo odmah strukturnu analogiju, koja nas dovodi na misao uspoređivanja mehaničkih i električkih veličina. Mi kažemo sili P u mehan.čkom sistemu odgovara (analogan je) napon E u električkom sistemu; masi m, induktivitet L; brzini v, struja i... Dakle, postavili smo fizikalnu analogiju mehaničkog i električkog sistema, pa nam nije sada teško izvršiti jednostavno modeliranje, kako je to prikazano na sl. 1.



Sl. 1.

Misao modeliranja pojavila se oko 1925. god., kada je Nickle prvi došao na ideju modeliranja mehaničkih sistema pomoću električkih krugova.

Pri modeliranju se možemo zadržati na istoj fizikalnoj kategoriji kao što je original, ili pak eksperimentirati s uređajem koji ne spada u istu fizikalnu kategoriju, služeći se pri tom matematičkim modelom — jednadžbom, koja strukturalno glasi isto i za model i za fizikalnu kategoriju, kojom oponašamo model.

Analogiju možemo povući između raznih fizikalnih sistema i električkog, pa nam to pruža široke mogućnost eksperimentiranja na samom modelu.

Eto pregleda nekih analogija:

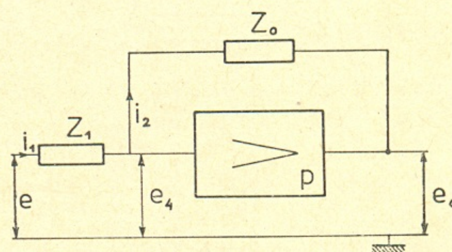
MEHANIKA		HIDRAULIKA	AKUSTIKA	ELEKTRIKA
Jednoliko gibanje	Rotacija			
P (sila)	M (moment)	P	p (zv. tlak)	E (napon)
m (masa)	m		m (zv. masa)	L (induktivitet)
μ (trenje)		η (viskozitet)	Z (zv. otpor)	R (otpor)
v (brzina)	ω (kut brz.)	Q (količ./sek)	c	I (struja)
x (pomak)	φ (kut. pom.)		x (akustički pomak)	Q (naboj)
c (konstanta elastičnosti)		kompresibilnost	toplinski kapacitet	$\frac{1}{c}$ (recipročna vrijednost kapaciteta)

Takvu analogiju bi mogli postaviti još i između kaloričkih, odnosno magnetskih i električkih veličina. Postoji još nekoliko analogija fizikalnih i električkih veličina, ali kako je ova najviše upotrebljavana, ne spominjemo ostale.

Važno je još napomenuti da treba naročito paziti kod modeliranja na odnos veličina nekog fizikalnog sistema i električkoga kojim radimo, jer nam o tome ovisi tačna interpretacija rezultata. Vezu nam daju faktori skale. — Već smo naveli da masi m u mehaničkom sistemu odgovara induktivitet L u električkom. Dakle $L = k_1 \cdot m$, gdje je k_1 faktor skale; zatim $q = k_2 \cdot x$, odnosno $t_e = k_3 \cdot t_m$. Iz toga izlazi za $v = \frac{k_3}{k_2} \cdot \frac{q}{t_e}$ i $P = \frac{k_3^2}{k_1 \cdot k_2} \cdot \frac{L \cdot q}{t_e^2}$ itd. Nije praktično izjednačiti t_m i t_e, jer nam u tom slučaju pojedine električke veličine postaju prevelike.

Postavlja se sada pitanje, kako postaviti model promatranog sistema, kako simulirati rad raznih fizikalnih procesa na analognim računalima?

Način na koji se računalu daju podaci zove se programiranje. Kod analognih računala program se izrađuje tačno po modelu, bilo direktnom, bilo indirektnom analogijom. (Razlikujemo direktna računala koja rade sa direktnim analogijama i indirektna koja rade pomoću matematičkih modela.) Program se slaže na ploči sa priključnicama na koju su izvedeni priključci pojedinih jedinica računala. Naime, računalo se sastoji iz čitavog niza jedinica — *sumatora, integratora, invertora,* pa *množenje, dijeljenje, generatora funkcija* i dr One čine radni sistem stroja. No, u njihovu tehničku izvedbu ne ćemo ulaziti.



Sl. 2.

Navest ćemo samo da je njihov osnovni element radno pojačalo. To je istosmjerno pojačalo na koje se postavljaju vrlo strogi uvijeti rada, jer je radno pojačalo onaj element, o kojem ovisi tačnost rada analognog računala.

Sumator, integrator, invertor i derivator, te simulatori raznih prijelaznih pojava rade kako je prikazano na sl. 2.

Pretpostavimo li, da radno pojačalo P troši neznatnu struju (mora imati veliki ulazni otpor), imamo $i_1 = i_2$, ili $\frac{e_u - e}{Z_1} = \frac{e_u - e_0}{Z_0}$.

Pojačanje pojačala je definirano kao $A = -\frac{e_0}{e_u}$, a jer se na radno pojačalo postavlja i zahtjev velikog pojačanja (> 15000, pa čak i do nekoliko stotina tisuća), to možemo zanemariti $e_u = -\frac{e_0}{A}$, pa izlazi

$$e_0 = -\frac{Z_0}{Z_1} e.$$

Dakle, ako smo na ulaz takve jedinice priključili neku funkciju u obliku napona e, to će nam oblik te funkcije na izlazu ovisiti o impedancijama Z_0 i Z_1, kao i njihovom odnosu. Stavimo li npr. $Z_0 = R_0$ i $Z_1 = R_1$ imat ćemo *jedinicu za množenje konstantom* $e_0 = -\frac{R_0}{R_1} e = -ke$, odnosno za $R_0 = R_1$ invertor, jer funkcija pri ovim operacijama mijenja predznak.

Ovisnost rada ovih jedinica o obliku impedancija Z_0 i Z_1 bit će najvidljivija iz priložene skice (sl. 3) na kojoj su i prkazane blok sheme pojedinih jedinica.

Kako ćemo množiti i dijeliti?

Ovo su dosta komplicirane operacije za analogno računalo. Ima više načina na koji je to riješeno.

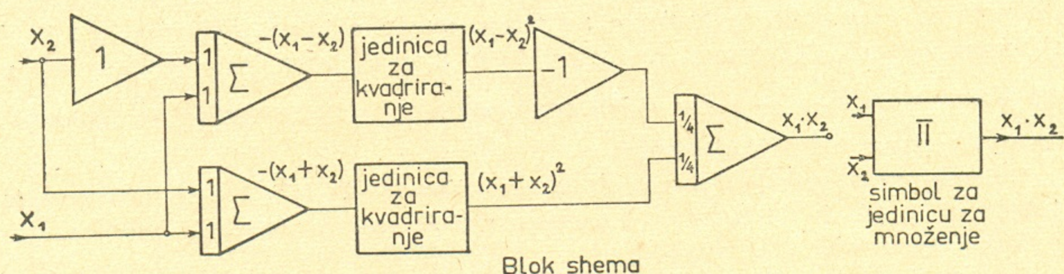
Interesantan je način množenja pomoću *jedinica za kvadriranje* prikazan na sl. 4.

Postupak se osniva na ovoj relaciji: $\frac{1}{4}\left[(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2\right] = x_1 \cdot x_2$

	Oblik ulaznog napona	Shema jedinice računala	Oblik izlaznog napona	Simbol jedinice računala	Matematička operacija
INVERTOR	e, t	R, R	e_o, t	-1	$e_o = -e$
INTEGRATOR	e, t	C, R	e_o, t	∫	$e_o = -\frac{1}{RC}\int e\,dt$
DERIVATOR	e, t	R, C	e_o, t	$\frac{d}{dt}$	$e_o = -RC\frac{de}{dt}$
SUMATOR	e_1, t; e_2, t	R, $\frac{1}{4}R$, $\frac{1}{2}R$	e_o, t	4, 2, Σ	$e_o = -(4e_1 + 2e_2)$

Sl. 3.

Jedinica za kvadriranje je u stvari *jedinica za generiranje funkcija* i opisat ćemo je nešto kasnije.

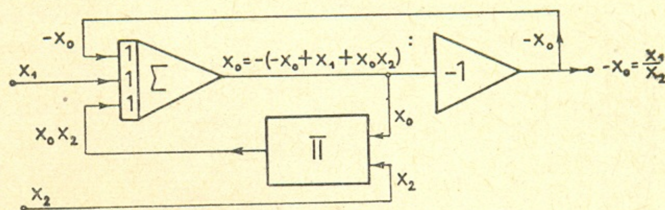


Sl. 4.

Proučavanje rada ostalih sistema za množenje, zahtijeva opširnije poznavanje nekih pojmova iz elektronike, pa se u to nećemo upuštati.

Dijeljenje je, također, riješeno na nekoliko načina, ali spominjem samo jedan, prikazan na sl. 5. Postupak se osniva na relaciji: $-x_0 = -x_0 + x_1 + x_0\, x_2$.

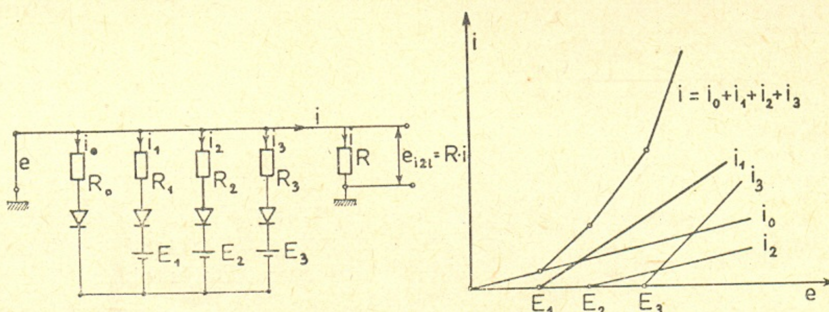
Naročito važna jedinica elektronskog analognog računala je *generator funkcija.* To je jedinica pomoću koje možemo, služeći se određenim tehničkim elementima, generirati funkcije željenog oblika. Izvodi se ili pomoću *potenciometra,* ili niza okolni *paralelno vezanih dioda,* ili pak pomoću *fotoformera.*



Sl. 5.

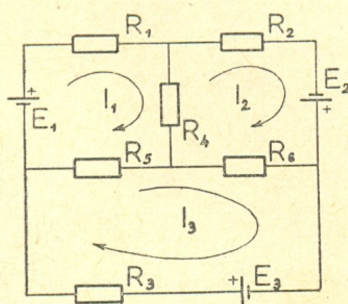
Potenciometar za generiranje funkcija izvodi se obično tako da se njegov otpor mijenja od tačke do tačke po zakonu željene funkcije.

Jedinica za generiranje funkcija pomoću dioda principijelno je prikazana na sl. 6. U ovisnosti o priključenom naponu na ulazu postaju postepeno vodljive pojedine diode (njihova vodljivost ovisi o naponu baterija E:) i funkcionalno tome imamo promjenu struje. O predotporima ovisi nagib funkcije.

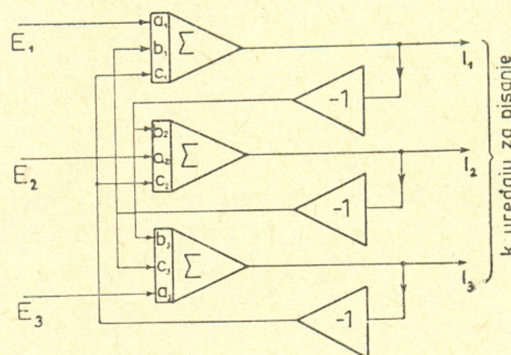


Sl. 6.

Ovakav generator funkcije možemo zgodnom kombinacijom tako prilagoditi da struja ovisi o ulaznom naponu e po zakonu parabole $i = k \cdot e^2$. Priključimo li tada neki otpor R na izlaz ovakvog generatora funkcija, nastat će na tom otporu pad



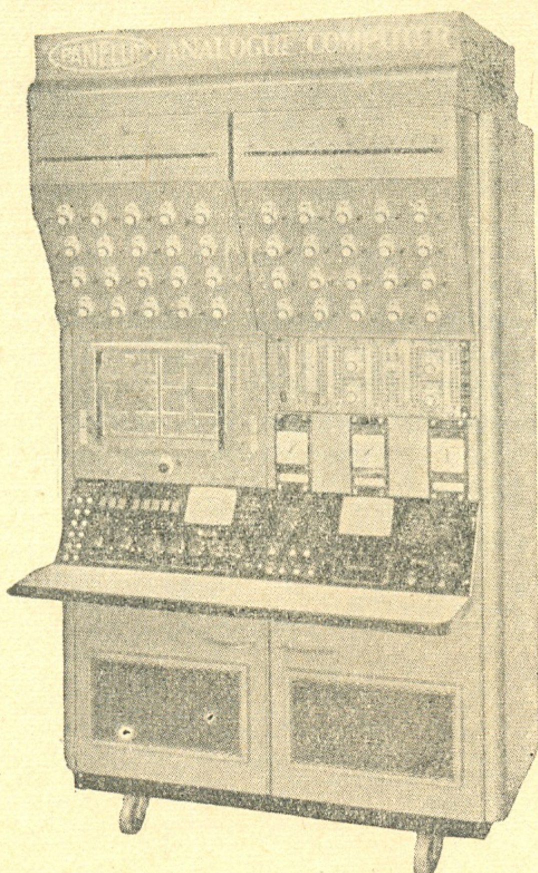
Sl. 7.



Sl. 8.

napona uslijed struje i, pa će se i promjena toga napona manifestirati u obliku tražene funkcije. Imat ćemo $e_{izl} = k \cdot e^2$, a to je *jedinica za kvadriranja* (izlazni napon je proporcionalan sa kvadratom ulaznog napona).

Fotoformer je krug sa katodnom cijevi i fotoćelijom. Na zastonu katodne cijevi je maska funkcije, koju želimo generirati, a krug je spojen tako da snop elektrona u katodnoj cijevi slijedi masku. Napon ovisi tada o funkciji na maski.



Sl. 9.

Uz ove nabrojene jedinice, analogno elektronsko računalo ima čitav niz raznih pomoćnih jedinica, ali one nisu bitne u našim daljnim razmatranjima.

2. Kad tako raspolažemo sa čitavim nizom radnih jedinica, ne postoji poteškoća, da postavimo program i pristupimo rješavanju nekog problema.

Eto, neka nam je zadan električki krug prema sl. 8. Treba odrediti struje I_1, I_2, I_3 u pojedinim petljama.

Jednadžbe za pojedine petlje toga kruga dobijemo po Kirchhoffovom zakonu:

$$I_1(R_1 + R_4 + R_5) - I_2 R_4 - \\ - I_3 R_5 = E_1, \quad (1)$$

$$- I_1 R_4 + I_2(R_2 + R_4 + R_6) - \\ - I_3 R_6 = E_2, \quad (2)$$

$$- I_1 R_5 - I_2 R_6 + I_3(R_5 + R_3 + \\ + R_6) = E_3. \quad (3)$$

Označimo li koeficijente uz struje sa odgovarajućim koeficijentima k_{rs}, jednadžbe nam dobiju oblik

$$K_{11} I_1 + K_{12} I_2 + K_{13} I_3 = E_1,$$
$$K_{21} I_1 + K_{22} I_2 + K_{23} I_3 = E_2,$$
$$K_{31} I_1 + K_{32} I_2 + K_{33} I_3 = E_3,$$

a jer ćemo problem riješiti pomoću jedinica za zbrajanje, napisat ćemo ih još u ovom obliku:

$$I_1 = \frac{E_1}{K_{11}} - \frac{K_{12}}{K_{11}} I_2 - \frac{K_{13}}{K_{11}} I_3, \quad \text{tj.} \quad I_1 = a_1 E_1 - b_1 I_2 - c_1 I_3 \quad (4)$$

$$I_2 = \frac{E_2}{K_{22}} - \frac{K_{21}}{K_{22}} I_1 - \frac{K_{23}}{K_{22}} I_3, \quad \text{tj.} \quad I_2 = a_2 E_2 - b_2 I_1 - c_2 I_3 \quad (5)$$

$$I_3 = \frac{E_3}{K_{33}} - \frac{K_{31}}{K_{33}} I_1 - \frac{K_{32}}{K_{33}} I_2, \quad \text{tj.} \quad I_3 = a_3 E_3 - b_3 I_3 - c_3 I_2 \quad (6)$$

Sl. 8 prikazuje sada postupak rješavanja. Vrijednosti I_1, I_2, I_3 želimo dobiti na izlazu iz sumatora, pa na ulaz priključujemo zgodnim kombiniranjem veličine sa desnih strana jednadžbi (4), (5) i (6).

Rezultat dobiven ovakvim procesom dovodi se na neki uređaj za pisanje ili se promatra na katodnoj cijevi osciloskopa.

To je samo jedan, razmjerno jednostavan primjer, kako se računa s elektronskim analognim računalom. Na sl. 9. prikazano je jedno elektronsko, analogno računalo.

Upotreba elektronskih analognih računala je svestrana i gotovo nema područja, u kojem nisu našli primjenu. Da nabrojimo samo neke od primjena:

Elektrotehnika (analiza linearnih i nelinearnih strujnih krugova, elektronska optika, dinamička naprezanja u električkim mašinama i transformatorima, regulacija električkih pogona, problemi ubrzanja elektr. nabijenih čestica); atomistika (simulacija rada nuklearnih reaktora, problemi regulacije kod reaktora); avijacija (simuliranje lijeta aviona, automatsko upravljanje, probe u tunelima za vjetar); strojarstvo (problemi vibracija, problemi nelinearne mehanike, hidraulički pogoni, problemi plinskih turbina, automobilska industrija); kemija (regulacije svih oblika, kemijskih procesa, brzina reakcije i difuzije); termodinamika; brodogradnja, a u najnovije vrijeme u ekonomskim i medicinskim istraživanjima.

O jednom diofantskom problemu

Dr MIRKO STOJAKOVIĆ, Novi Sad

Mnogi problemi u algebri ili geometriji svode se na rešavanje nekog sistema jednačina ali se pri tom od svih uopšte mogućih rešenja tog sistema jednačina zadržavaju samo ona koja imaju neka unapred određena svojstva. Izdvajanje takvih rešenja nije uvek lak posao. Iz jedne vrste takvih problema razvila se posebna grana matematike — diofantska analiza. Čitav niz čuvenih problema matematike upravo je te prirode. Tako, na primer, ni danas se nezna da li jednakost $x^n+y^n=z^n$ ima ili nema rešenja u celim brojevima $x, y, z \neq 0$ za svaki prirodan broj n. Ta jednačina ima rešenja kad je $n = 2$ na primer $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$, nema rešenja kad je $n = 3$, nema ih ni kad je $n = 4, 5, 6, \ldots$ ali se ne zna postoji li možda još neko n sem $n = 2$ kad ta jednačina opet ima rešenja u celim brojevima (različitim od nule). To je čuveni *Fermatov* problem. Ne manje slavan je i *Goldbahov* problem koji je uz to i jednostavniji po formulaciji: linearna jednačina $x + y = 2z$ ima rešenja u prostim brojevima x, y za svaki prirodan broj z. No koliko god da je to jednostavno kazati ne sledi da je to jednostavno i dokazati — i taj problem do danas nije rešen. Ispitane su takve jednačine za veoma velike vrednosti z (čak i do 9 000 000) i uvek su probanjem nađena rešenja u prostim brojevima ali to još nije dokaz ta tako mora biti za svako z. Ovi su primeri jednostavni ali su ograničenja »stroga«.

Ovde ćemo posmatrati linearnu jednačinu $Ax + By = C$ gde su A, B, C celi brojevi ali nećemo tražiti da rešenja budu prosti brojevi kao u Goldbahovom problemu nego »samo« da budu takođe celi brojevi.

Neka je, dakle, data jednačina

$$(1) \quad Ax + By = C$$

gde su $A \neq 0$, $B \neq 0$, C celi brojevi i neka se traže sva rešenja te jednačine u celim brojevima x, y.

Utvrdićemo uslove pod kojima takva rešenja uopšte postoje i navesti postupak kojim se do rešenja dolazi kad se utvrdi da ona postoje. Odvojićemo, znači problem egzistencije rešenja od problema algoritma kojim se rešenja nalaze.

Najpre ćemo problem uprostiti smanjivši broj pretpostavki pod kojima se jednačina (1) ima rešavati.

Pre svega, brojevi A, B, C u jednačini (1) mogu se smatrati uzajamno prostim to jest oni nisu sva tri deljivi jednim istim celim brojem D većim od 1. Jer ako je

$$(2) \quad A = A_1D,\ B = B_1D,\ C = C_1D$$

gde su i A_1, B_1 C_1 celi brojevi a D njihov najveći zajednički delitelj $\neq 1$ onda se jednačina (1) svodi na ekvivalentnu jednačinu

$$(3) \quad A_1x + B_1y = C_1$$

koja ima koeficijente uzajamno proste pa kako sva njena rešenja jesu rešenja jednačine (1) a važi i obrnuto, to je dovoljno posmatrati jednačinu (1) pod navedenom pretpostavkom.

Dalje, možemo uzeti da su A i B u jednačini (1) pozitivni brojevi. Jer, ako su A i B negativni brojevi množenjem cele jednačine sa —1 dobijamo novu ekvivalentnu jednačinu sa pozitivnim koeficijentima uz nepoznate. Ako je jedan od brojeva A, B pozitivan a drugi negativan, recimo $A < 0$ $B > 0$, onda se smenom $x = -u$ dobija jednačina sa pozitivnim koeficijentima uz nepoznate, pa ako je u rešenju u ceo broj biće i $-u$ odnosno x ceo broj i problem tom smenom ništa ne gubi.

Posmatrajmo, prema tome, jednačinu (1) pod pretpostavkom da su A, B prirodni brojevi i da A, B, C nemaju zajednički delitelj veći od 1. Uzmimo sad specijalni slučaj jednačina (1) kad je $C = 0$. Neka je dakle, najprije

$$(4) \quad Ax + By = 0.$$

Ako A i B imaju najveći zajednički delitelj $D \neq 1$, to jest ako je $A = A_1D$, $B = B_1D$ onda se jednačina (4) svodi na jednačinu

$$(5) \quad A_1x + B_1y = 0$$

gde su sad A_1, B_1 uzajamno prosti prirodni brojevi. Iz $A_1x = -B_1y$ sledi da x mora biti deljivo sa B_1 jer je proizvod A_1x deljiv sa B_1 a A_1 nije deljivo tim brojem. Dakle $x = mB_1$. Isto tako dobija se $y = nA_1$ gde su m, n neki celi brojevi. Tada se jednačina (5) svodi na

$$(6) \quad A_1B_1(m + n) = 0$$

pa mora biti $m + n = 0$ odnosno $m = -n$ i tako imamo

STAV 1. *Jednačina (4) ima rešenja i sva ona data su sa*

$$(7) \quad x = mB_1, \ y = -nA_1$$

gde je m ma koji ceo broj.

Uzmimo sad još specijalni slučaj jednačine (1) u kome je $C = 1$. Neka je, dakle,

$$(8) \quad Ax + By = 1.$$

Ako A i B imaju najveći zajednički delitelj $D \neq 1$ to jest ako je $A = A_1D$, $B = B_1D$, tada se jednačina (8) svodi na

$$(9) \quad D(A_1x + B_1y) = 1$$

pa je leva strana deljiva sa D a desna to ne može biti i nikakve vrednosti za x, y u celim brojevima ne mogu tu ništa da poprave. Stoga u tom slučaju jednačina (8) nema rešenja u celim brojevima. Ako su pak A i B u jednačini (8) uzajamno prosti brojevi onda jednačina (8) ima rešenja i to dokazujemo time što rešenje stvarno navodimo. Jedno od rešenja naći ćemo poznatim Euklidovim algoritmom kojim se sračunava najveći zajednički delitelj za dva prirodna broja. Verižno deljenje koje se tu izvodi polazeći od brojeva A, B mora dovesti do ostatka 1 jer je to najveći zajednički delitelj dva uzajamno prosta broja A, B. Neka je dakle $A > B$ (> 0) i neka je pri deljenju broja A brojem B količinik k_1 a ostatak $D_1 < B$, to jest

$$(10) \quad A = k_1B + D_1 \ D_1 < B.$$

Postupak ponovimo sa B i D ako nije $D_1 = 1$ to jest neka je

$$(11)\quad B = k_2 D_1 + D_2 \quad D_2 < D_1.$$

Ako nije $D_2 = 1$ postupak ponovimo sa D_2 i D_1 to jest neka je

$$(12)\quad D_1 = k_3 D_2 + D_3, \quad D_3 < D_2.$$

Ako ni sad nije $D_3 = 1$ postupak možemo opet ponoviti. Jednom se kao ostatak mora dobiti 1 jer niz pozitivnih brojeva A, B, D_1, D_2, D_3 opada pa ako se produži mora da se završi sa 1. Da ne bismo opterećivali tekst a da bi suština postupka ipak bila jasna dovoljno je da uzmemo da je već $D_4 = 1$ to jest važi, recimo,

$$(13)\quad D_2 = k_4 D_3 + 1.$$

Jednačine (10), (11), (12) i (13) sadrže ostatke D_1, D_2, D_3 i kako tu ima četiri jednačine a tri veliične ove se mogu eliminisati. Zbilja idući unazad od jednačine (13) pa do (10) imamo redom

$$\begin{aligned}1 &= D_2 - k_4 D_3 = D_2 - k_4 (D_1 - k_3 D_2) = D_2 (1 + k_3 k_4) - k_4 D_1 = (B - k_2 D_1)(1 + k_3 k_4) - k_4 D_1 = \\ &= B(1 + k_3 k_4) + D_1(-k_2 - k_2 k_3 k_4 - k_4) = B(1 + k_3 k_4) + (A - k_1 B)(-k_2 - k_2 k_3 k_4 - k_4) = \\ &= A(-k_2 - k_2 k_3 k_4 - k_4) + B(1 + k_3 k_4 + k_1 k_2 + k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1 k_4) = A x_1 + B y_1,\end{aligned}$$

gde su sa x_1, y_1 označeni izrazi u poslednjim dvema zagradama, to jest

$$(14)\quad A x_1 + B y_1 = 1,$$

pa je (x_1, y_1) jedno rešenje jednačine (8). I tako važi

STAV 2. *Jednačina*

$$Ax + By = 1$$

ima rešenja u celim brojevima onda i samo onda kad su A i B uzajamno prosti brojevi.

Sad tek možemo posmatrati opštu jednačinu (1) (naravno pod stalnom pretpostavkom da su A, B prirodni brojevi a A, B, C nemaju zajednički delitelj veći od 1. Pokazaćemo da važi

STAV. 3. *Jednačina*

$$(1)\quad Ax + By = C$$

ima rešenja u celim brojevima onda i samo onda kad su brojevi A, B uzajamno prosti.

Zbilja, ako brojevi A, B nisu uzajamno prosti nego je $A = A_1 D$, $B = B_1 D$, onda je $D(A_1 x + B_1 y) = C$ pa je leva strana deljiva sa D a desna nije što ne može biti ni za kakove cele brojeve x, y. Obrnuto, ako su A i B uzajamno prosti onda iednačina

$$(15)\quad Au + Bv = 1$$

prema stavu 2 ima rešenja i neka je jedno od njih (u_0, v_0). Onda je međutim (Cu_0, Cv_0) jedno rešenje jednačine (1) jer je $ACu_0 + BCv_0 = C(Au_0 + Bv_0) = C$. Da nađemo s v a rešenja jednačine (1), u slučaju kad ih ona uopšte ima, postupimo ovako: Iz $Ax+By = C$ i $ACu_0+BCv_0 = C$ sledi oduzimanjem $A(x-Cu_0) + B(y-Cv_0)=0$ a prema stavu 1 mora biti

$$x\text{-}Cu_0 = mB, \quad y\text{-}Cv_0 = -mA,$$

jer su A i B uzajamno prosti brojevi pa su uslovi za primenu stava 1 ispunjeni. Stoga važi

STAV 4. *Sva rešenja jednačine $Ax + By = C$, u slučaju kad ih ona ima, data su sa*

$$x = Cu_0 + mB, \quad y = Cv_0 - mA,$$

gde je (u_0, v_0) *jedno rešenje jednačine* $Au + Bv = 1$ a $(mB, -mA)$ *opšte rešenje jednačine* $Az + Bw = 0$.

Primer 1. Jednačina $4x + 6y = 5$ nema rešenja jer brojevi 4 i 6 nisu uzajamno prosti.

Primer 2. Jednačina $4x + 5y = 6$ ima rešenja jer su brojevi 4 i 5 uzajamno prosti. Jedno rešenje jednačine $4u + 5v = 1$ je $u_0 = 4$, $v_0 = -3$ a opšte rešenje jednačine $4z + 5w = 0$ je $z = 5m$, $w = -4m$ pa je opšte rešenje jednačine $4x + 5y = 6$ dato sa $x = 6u_0 + 5m$, $y = 6v_0 - 4m$ to jest $x = 24 + 5m$, $c = -18 - 4m$, gde m može biti koji bilo ceo broj.

Primenimo sad nađene stavove na sledeći problem: ispitati kada su $m + n$ i mn uzajamno prosti brojevi, ako su m i n prirodni brojevi.

STAV 5. *Prirodni brojevi* m, n *uzajamno su prosti onda i samo onda kad su* $(m + n)$ *i* mn *uzajamno prosti brojevi.*

Zbilja, ako su $m + n$ i mn uzajamno prosti brojevi onda za podesno nađene cele brojeve x, y važi $(m+n)x + mny = 1$ (Stav 2). Odatle sledi $mx + n(x + my) = 1$ pa su m i n uzajamno prosti brojevi. Obrnuto, neka je $mx + ny = 1$ (*) za neke cele brojeve x, y to jest neka su m, n uzajamno prosti brojevi, tada je redom

$$1 = mx + ny = m(x + zn) + n(y - zm) = (x + zn)(m + n) - (x + zn)n + (y - zm)n =$$
$$= (x + zn)(m + n) + [y - x - z(m + n)]n,$$

gde je z neki još neodređeni broj.

Uzimajući sad $z = y(y - x)$ dobijamo dalje

$$1 = [x + y(y - x)n](m + n) + (y - x)(1 - ym - yn)n$$

a kako po pretpostavci (*) važi $1 - ny = mx$ biće poslednja jednakost

$$1 = [x + y(y - x)n](m + n) + (y - x)(x - y)mn = (m + n)u + mnv$$

gde je stavljeno $u = x + (y - x)n$, $v = -(y - x)^2$ a veza $1 = (m + n)u + mnv$ i kazuje da su $(m + n)$ i mn uzajamno prosti brojevi. Time je i stav 5 dokazan.

Kako nastaju električni naboji u grmljavinskom oblaku

BOŽENA VOLARIĆ, Zagreb

(Nastavak)

U neprekidnom traženju odgovora na pitanje »Kako nastaje elektricitet u grmljavinskom oblaku« pokušao je *Wall* 1948. god. naći rješenje idući stazama svojih prethodnika. U početku prihvaća gledište Wilsona, koji je smatrao da normalno električno polje atmosfere daje poticaj i stvara uvjete za grmljavinske procese. Međutim teško je bilo povjerovati, da električno polje atmosfere, čija jakost kod lijepog vremena iznosi oko 1 V cm^{-1} može stvoriti polje do 10 000 puta jače od sebe i odrediti njegov smjer. Stoga se Wall ovdje odvaja i traži novi put. Potaknut svojim istraživanjima o nastajanju atmosferskih kristala leda i snijega povezuje njihov postanak s početnom proizvodnjom elektriciteta u grmljavinskom oblaku. Wall polazi sa stanovišta, da je led kristalizirana materija, koja je izgrađena iz molekula vode. Pošto su te molekule električni dipoli, može i gotov kristal leda posjedovati električna svojstva, ako molekule vode pri kristalizaciji zauzmu određenu orijentaciju. Takav kristal je električno analogan permanentnom magnetu. Za razliku od magneta na kristalu leda postoje slobodno pokretljivi naboji obaju predznaka.

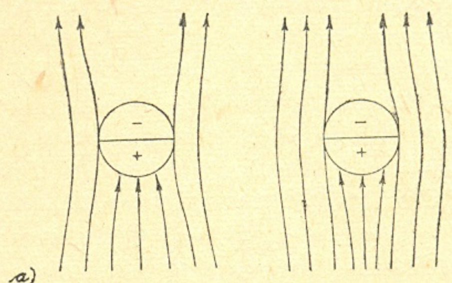
Mnogobrojna opažanja zaista potvrđuju, da su kristali atmosferskog leda električno polarizirani u smjeru glavne, heksagonalne osi. Ali primarni električni polaritet kristala ubrzo nestaje zbog atmosferskih iona, koji ga okružuju. Polovi kristala privlače suprotno nabijene ione i neutraliziraju se, a kristal kao cjelina ostaje nenabijen.

Wall sada polazi dalje u svojim razmatranjima i pretpostavlja: kristal leda radi svojeg oblika pada kroz atmosferu u točno određenom položaju. Kod toga njegova električna os stoji skoro vertikalno s jednim polom okrenutim prema gore, a drugim prema dolje, ukoliko se radi o svježem kristalu, koji je još električno aktivan. Ako je donji pol pozitivan, tada on privlači negativno nabijene atmosferske ione, koji se okupljaju oko donje strane kristala. Naprotiv pozitivni ioni prostruje oko kristala, jer ih odbija istoimeni pol. Samo malenom broju tih pozitivno nabijenih iona uspije doći do gornje polovine kristala, gdje se nalazi negativni pol. Kristal leda se uslijed toga električno nabija i to bez sudjelovanja vanjskog električnog polja. Proces nabijanja traje sve dotle, dok se čestica leda nalazi u porastu. Kristali leda najbrže rastu u temperaturnom području između —10° C i —15° C, jer u tom intervalu postoji najveća razlika između zasićenog stanja vodene pare iznad površine vode ili iznad leda. Maksimalni tlak vodene pare iznad vode kod tih je temperatura za 0,2 mm Hg veći nego iznad leda. Prema tome u tom temperaturnom intervalu vodena para postaje mnogo prije zasićena nad površinom leda, s tim je ostvaren glavni uvjet za stvaranje čestica leda.

Kod tih temperatura prevladavaju kristali leda u obliku tankih, heksagonalnih pločica ili dendritičnih tj. razgranatih zvijezdica. Prema brojnim opažanjima kristali se leda u tom temperaturnom području često pojavljuju također i u kombiniranom obliku. Sastoje se od dviju različito velikih pločica međusobno spojenih tankom prizmom. Pločice s promjerom do 1 mm lebde s horizontalno postavljenom širokom ravnom plohom. Električna os im je tada vertikalno usmjerena. Kombinirani kristali padajući kroz atmosferu orijentirani su tako, da prema gore nose dobro razvijenu veću pločicu, koja prema Wallu predstavlja negativni pol kristala, malena, slabo razvijena pločica, okrenuta je prema dolje i pretstavlja pozitivni pol kristala.

Time su dani preduvjeti za izgradnju početnog električnog polja u atmosferi. Sada stupa na snagu »efekat asimetrije« kako ga je Wall označio, a glasi: »Svaka čestica, koja u ioniziranom zraku zbog djelovanja sile teže prolazi kroz vertikalno električno polje, preuzima na sebe električni naboj. Predznak primljenog naboja jednak je naboju atmosferskih iona, koji se gibaju suprotno od čestice. Prolazeći kroz električno polje čestica vrši radnju na teret sile teže i time doprinosi pojačanju energije polja«.

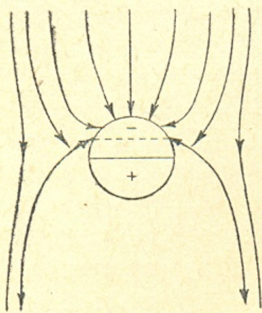
U ovom postulatu sadržana je, kao specijalan slučaj, Wilsonova teorija influencije. Naziv »asimetričan« dolazi odatle što se čestice gibaju jednostrano zbog svoje tendencije prema vertikalnom padu. Nesimetrično dakle prema putovanju iona, koji putuju u oba smjera. Budući da čestice odvode sa sobom ione, koji im dolaze u susret dolazi i do nesimetričnog kretanja naboja.



Sl. 8. Putanje »uzlaznih« iona oko nenabijene čestice: *a)* čestica polaganog pada, *b)* čestica brzoga pada

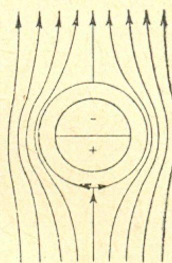
Susretanje elemenata oborine i atmosferskih iona može poprimiti razne varijante, koje su ovisne o stupnju polarizacije, kao i o brzini padanja oborine. Prikazat ćemo sada neke osnovne slučajeve. Radi pojednostavljenja pretpostavit ćemo, da su čestice oborine malene kuglice.

Dvije gornje slike prikazuju pritjecanja »uzlaznih« iona prema padajućoj čestici i to na slici a) vidi se čestica, koja polagano pada, a na slici b) čestica, koja brzo pada. Pri normalnim električnim uvjetima u atmosferi »uzlazni« ioni nose negativan naboj. Oni dakle mogu nesmetano pritjecati na donju kalotu, gdje je smješten pozitivan naboj. Ali na gornjoj strani čestice stvara se za njih »mrtvi prostor« u koji oni ne mogu prodrijeti, jer je tamo smješten negativan naboj čestice. Naprotiv »silazni« ioni, koji su u ovom slučaju pozitivno nabijeni, nesmetano će stizati na gornju kalotu, ukoliko brže putuju nego što kuglica pada. U graničnom slučaju, kada kuglica miruje, »silazni« ioni pritječu prema njoj iznad cijele gornje kalote, kako se vidi iz slijedeće slike.



Sl 9. Putanje »silaznih« iona, kada se ioni brže pokreću i sustižu česticu

Međutim »silazni« ioni uopće ne će doprijeti do kuglice, ako ona brže pada nego što oni silaze. Uz takove uvjete »mrtvi prostor« se proteže oko cijele kuglice za ovakove »silazne ione«.



Sl. 10. Putanje »silaznih« iona, kada čestica pada brže nego ioni

Nabijanje kuglice odnosno elemenata oborine ovisi dakle o razlici između pritjecanja silaznih i uzlaznih iona.

Prema ovoj teoriji početni pogon grmljavinskog generatora leži u području među —10° C do —15° C, a vezan je na postanak kristala leda, koji zahvaljujući svojem prirodnom električnom polaritetu izgrađuju pri vertikalnom padu početno električno oplje u atmosferi.

Vidimo, da se kroz godine i godine nastojalo, a i danas se još uvijek nastoji ustanoviti, koji je glavni i odlučujući proces u proizvodnji grmljavinskog elektriciteta. Međutim uz sav trud nije se došlo do konačnog objašnjenja. Stoga se pojavljuje sumnja je li pitanje kao takovo uopće ispravno postavljeno! Radi neispravne formulacije izgleda da je ono decenijama zavađalo istraživače na krivi put. Neprekidno se težilo za pojednostavljenjem uvjeta, koji vladaju u grmljavinskom oblaku, kako bi ih se moglo zanemariti i svu pažnju usredotočiti na jedan jedini proces, koji se smatrao najodgovornijim za grmljavinske pojave. Naravno, svaki istraživač označio je onaj proces kao glavni, koji mu se s njegovog stanovišta činio najvažnijim i najvjerojatnijim. Uvijek se dakle tražio samo jedan jedini glavni efekat, koji bi djelovao u svim grmljavinskim i u svim njenim dijelovima. Ali kod toga se ne smije smetnuti s uma, da grmljavina nije eksperimenat vršen u laboratoriju, već prirodna pojava. Priroda u svom laboratoriju — a to je naša atmosfera — radi s veoma raznolikim mogućnostima.

Stoga Wall s potpunim pravom upozorava, da u divovskoj tvorevini, kao što je grmljavinski oblak, mogu doći do izražaja i oni elementarni procesi, koji pri laboratorijskim uvjetima nisu inače primjetljivi. Svaki efekat bi se dakle morao procjenjivati prema *kvantitativnom djelovanju*. Nadalje Wall upozorava, da u grmljavinskom oblaku, zbog njegovih ogromnih dimenzija, ne vladaju homogeni fizikalni uvjeti. Stoga izgleda vrlo vjerojatno, da u njemu može istodobno djelovati, više različitih mehanizama, koji proizvode elektricitet. Od slučaja do slučaja prema popratnim okolnostima može jedan od tih procesa preuzeti vodeću ulogu.

Prema riječima jednog istaknutog učenjaka, istraživači grmljavinskog elektriciteta nalaze se u posebnoj situaciji. Iako o tim pojavama znaju mnogo, možda čak i previše, ipak na ovdje postavljeno pitanje, ne mogu za sada još dati konačan odgovor.

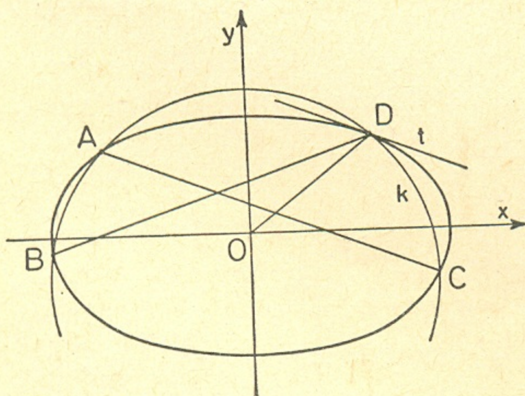
O zakrivljenosti čunjosjeka

STJEPAN ŠKARICA, Zagreb

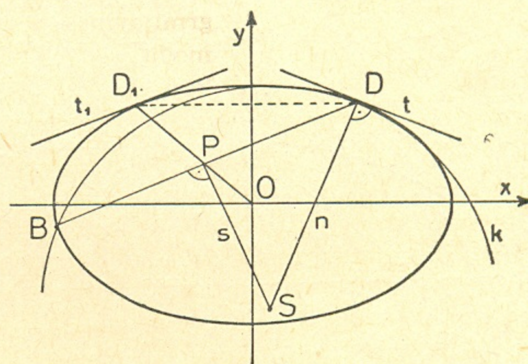
1. Kružnica je u svakoj svojoj tački jednako zakrivljena. Kao mjera njezine zakrivljenosti uzima se recipročna vrijednost njezinog polumjera ρ, tj. $\frac{1}{\rho}$, jer što je polumjer manji, zakrivljenost je veća.

2. Kod drugih krivulja, npr. kod čunjosjeka, zakrivljenost se mijenja od tačke do tačke. Stoga govorimo o zakrivljenosti krivulje u zadanoj tački, a izjednačujemo je sa zakrivljenošću one kružnice, koja s krivuljom u toj tački ima *dotik* najmanje *2. reda*, tj. ima u njoj s krivuljom zajednički najmanje tri beskonačno blize tačke. S tri od tih tačaka *kružnica zakrivljenosti* je jednoznačno određena. Kad je broj tih tačaka *tri*, kružnica zakrivljenosti siječe krivulju i ima s njom zajedničku jednostruku tangentu; kad je broj zajedničkih beskonačno blizih tačaka *četiri*, kružnica zakrivljenosti ima s krivuljom *dotik 3. reda*, tj. ima s njom zajednički dvostruku tangentu: kad je broj onih tačaka *pet*, tj. kod *dotika 4. reda*, uz zajedničku dvostruku tangentu kružnica i krivulja se i sijeku, itd.

3. Da konstruiramo kružnicu zakrivljenosti K u zadanoj tački $D(x_1, y_1)$ elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, povucimo jednu od tetiva elipse koje su usporedne s tangentom elipse t u tački D, na pr. AC (sl. 1.)! Kružnica k, određena tačkama A, C, D ne može dirati elipsu



Sl. 1.



Sl. 2.

u tački D ako ta nije tjeme, jer dijametar OD koji je konjugiran tetivi AC pa je raspolavlja, nije na njoj okomit. Iz onoga što slijedi, razabrat ćemo da ta kružnica u općem slučaju ne dotiče elipsu ni u tački A ni u tački C, nego je siječe u četvrtoj tački B.

Neka je jednadžba kružnice $k \equiv x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$! Pramen čunjosjeka koji prolaze tačkama A, B, C, D ima jednadžbu $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \lambda(x^2 + y^2 + lx + my + n) = 0$. Za određeno λ taj će čunjosjek *degenerirati* u pravce AC i BD. Ako su im jednadžbe: $AC \equiv Px + Qy + R = 0$, $BD \equiv P_1x + Q_1y + R_1 = 0$, onda je jednadžba sustava tih dvaju pravaca: $(Px + Qy + R)(P_1x + Q_1y + R_1) = 0$. Ta je jednadžba za spomenuto λ istovetna s gornjom, a kako u toj nema člana sa xy, mora biti $PQ_1 + P_1Q = 0$, ili $\frac{P}{Q} = -\frac{P_1}{Q_1}$, a to znači da pravci AC i BD sa svakom osi elipse zatvaraju istokračan trokut ili kraće da su *antiparalelni* s obzirom na te osi. Ako sad tetivu AC pomičemo paralelno, tetiva BD će ostati čvrsta, a kada AC pokrije tangentu t u tački D, kružnica k će preći u kružnicu zakrivljenosti K u tački D elipse.

4. Kružnicu K možemo sad lako konstruirati. U tački $D(x_1, y_1)$ konstruiramo tangentu t i normalu n, a u tački $D_1(-x_1, y_1)$ tangentu t_1. Tačkom D povučemo pravac usporedan s t_1; tome pravcu pripada tetiva BD, koju u tački P raspolavlja njoj konjugirani dijametar OD_1. Simetrala s tetive BD siječe normalu n u središtu S kružnice K.

Posve jednako se konstruira kružnica K u tački hiperbole ili parabole, ako ta tačka nije tjeme.

5. Odredimo koordinate x_0 i y_0 središta S i polumjer $SD = \rho$ kružnice K (sl. 2.)! Jednadžba tangente t jest $b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0$, a tetive DB $y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$ pa jednadžba kružnice K ima oblik

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + \lambda\,(b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2)\,(b^2x_1x - a^2y_1y - b^2x_1^2 + a^2y_1^2) = 0.$$

U toj jednadžbi moraju koeficijenti od x^2 i y^2 biti jednaki, tj. $b^2 + \lambda b^4x_1^2 = a^2 - \lambda a^4y_1^2$; odatle je $\lambda = \frac{e^2}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}$ pa jednadžba kružnice K prelazi u

$$x^2 + y^2 - \frac{2e^2x_1^3}{a^4}x + \frac{2e^2y_1^3}{b^4}y + x_1^2 + y_1^2 - \frac{2\,(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)}{a^2b^2} = 0.$$

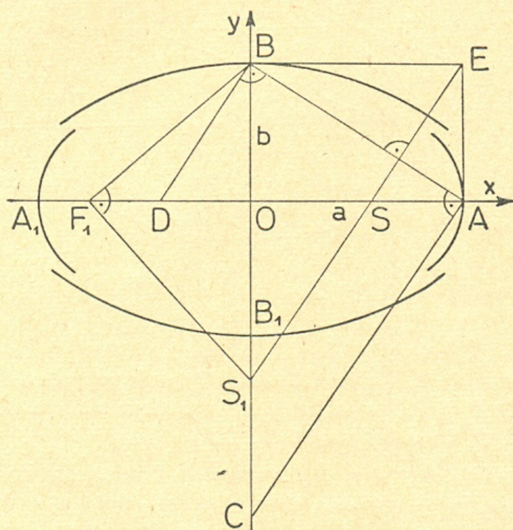
Odatle nalazimo da su koordinate središta S kružnice K:

$$x_0 = \frac{e^2x_1^3}{a^4},\quad y_0 = -\frac{e^2y_1^3}{b^4},\quad \text{a}\quad \overline{SD}^2 = \rho^2 = \left(x_1 - \frac{e^2x_1^3}{a^4}\right)^2 + \left(y_1 + \frac{e^2y_1^3}{b^4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{a^8b^8}\left\{b^4x_1^2\,[a^4b^2 - b^2e^2x_1^2]^2 + a^4y_1^2\,[a^2b^4 + a^2e^2y_1^2]^2\right\} = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^3}{a^8b^8},\quad \rho = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

jer su izrazi u uglastim zagradama jednaki, a također je

$$a^4b^2 - b^2e^2x_1^2 = a^4b^2 - b^2\,(a^2 - b^2)\,x_1^2 = a^2\,(b^2x_1^2 + a^2y_1^2) - a^2b^2x_1^2 + b^4x_1^2 = b^4x_1^2 + a^4y_1^2.$$



Sl. 3.

6. U tjemenu A ima kružnica K središte $S\left(\frac{e^2}{a},\, 0\right)$, $\rho = \frac{b^2}{a}$, u tjemenu B središte $S_1\left(0,\, -\frac{e^2}{b}\right)$, dok je polumjer $\rho_B = \frac{a^2}{b}$.

U sl. 3. okomica na AB u tački B siječe os x u tački D pa je po poučku o visini pravokutnoga trokuta $OD = \frac{b^2}{a} = \rho_A$, dok okomica na AB u tački A siječe os y u tački C, pa je $OC = \frac{a^2}{b} = \rho_B$. Načinimo li nad poluosima pravokutnik $BOAE$ i povučemo okomicu iz tačke E na AB, sjeći će ta osi x i y u tačkama S i S_1, tj. u središtima kružnica zakrivljenosti u tjemenima A i B, jer je

$$SA = OD,\quad S_1B = OC.$$

I okomica na BF_1 u fokusu F_1 prolazi središtem S_1.

7. Za hiperbolu je središte kružnice K u tački $D_1(x_1, y_1)$ tačka $S\left(\frac{e^2x_1^3}{a^4},\, -\frac{e^2y_1^3}{b^4}\right)$, $\rho = \frac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$, a u desnom i lijevom tjemenu na realnoj osi $S\left(\pm\frac{e^2}{a},\, 0\right)$, $\rho = \frac{b^2}{a}$.

Kod parabole kružnica zakrivljenosti K u tački $D_1(x_1, y_1)$ ima središte

$$S\left(p + 3x_1,\, -\frac{y_1^3}{p^2}\right),\quad \text{a polumjer}\quad \rho = \frac{(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2};$$

za tjeme je $S(p,\, 0)$, a $\rho = p$.

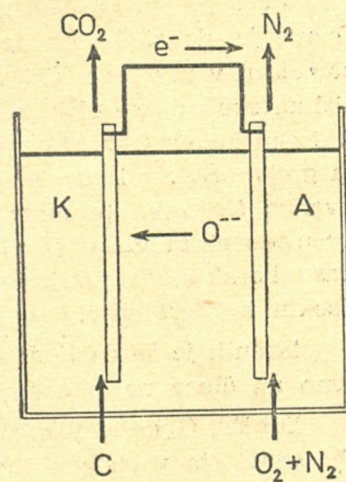
Členi na gorivo

J. STRNAD, Ljubljana

Industrija krije del svojih energijskih potreb z energijo, ki jo je Sonce pred stotisočletji kopičilo v gorivih. Toplotni stroji, ki izrabljajo to energijo, pretvorijo v najboljšem primeru le okoli 40% kemične energije goriva v mehansko energijo. Nekdaj je bil ta izkoristek še dosti manjši. Zato že od nekdaj iščejo možnosti za bolj smotrno izrabo kemične energije goriv. Posebno vneto so se lotili tega problema ztradi hitrega krčenja zalog premoga in nafte, ker bi te ob ugodnejšim izkoristku trajale dalj časa. Zaradi možnosti, da bi v prihodnosti izkoriščali jedrsko energijo, je vnema le malo popustila.

Toplotni stroji pretvorijo kemično energijo v toploto, toploto pa dalje v mehansko energijo, zato je njihov izkoristek tako majhen. Teoretično največji možni izkoristek ima Carnotov toplotni stroj. Ta ima dva toplotna rezervoarja; toplota teče od toplejšega z absolutno temperaturo T_2 k hladnejšemu z absolutno temperaturo T_1. Zaradi entropijskega stavka, se lahko v mehansko delo pretvori samo $(T_2—T_1)/T_2 \cdot 100\,\%$ toplote, ki jo odda gorivo toplejšemu rezervoarju. Upoštevati moramo še, da je Carnotov stroj samo namišljen in so izkoristki resničnih toplotnih strojev še precej manjši.

Ugodnejše izkoristke moramo iskati pri napravah, ki kemične energije goriva ne pretvorjo v toploto, ampak neposredno v kakšno drugo vrsto energije. Zaradi tega razloga so raziskovali člene na gorivo, ki kemično energijo goriva neposredno pretvorijo v električno energijo. Člen na gorivo je soroden galvanskemu členu, ki jih poznamo n. pr. iz žepnih baterij. Člena se razlikujeta po tem, da dobiva galvanski člen energijo od kemičnih reakcij, pri katerih se troši ena elektrod ali obe elektrodi, ki sta vgrajeni v člen. Zato se galvanski člen zaradi delovanja izrabi. Pri členu na gorivo je drugače: na anodo (pozitivno elektrodo) neprestano doteka gorivo, na katodo (negativno elektrodo) pa neprestano doteka snov, ki gorivo oksidira — oksidant. Če ima člen gorivo obojega zadosti, deluje poljubno dolgo časa. Člen na gorivo ima v primeri z galvanskim členom slabost da kemične energije ne more nekaj časa obdržati, ampak jo takoj odda kot električno energijo.



Najvažnejša goriva, ki jih uporabljajo členi, so premog, nafta in njuni derivati ter vodik. Oksidant je vedno kisik iz zraka. Končni efekt člena na gorivo je isti kot pri gorenju tega goriva. Oglejmo si delovanje člena na premog na naslednji močno poenostavljeni shemi! Člen sestavljata dve elektrodi, ki sta pomočeni v elektrolit (sl. 1). Na anodo dovajamo zrak, na katodo pa premog. Na anodi reagira kisik iz zraka: molekula kisika in štirje elektroni dajo dva dvakrat negativno nabita kisikova iona. Po elektrolitu pripotujejo kisikovi ioni na katodo. Tu se vežejo z atomi ogljika v ogljikov dioksid, pri čemer se sprostijo štirje elektroni. Na anodi je elektronov premalo, ker se porabijo za reakcijo z molekularni kisika. Na katodi pa je elektronov preveč, ker jih oddajajo kisikovi ioni. Tako nastopi med obema elektrodama električna napetost. Če zvežemo elektrodi z vodnikom, tečejo elektroni s katode na anodo, kjer s krog sklene. Z enačbani zapišemo poenostavljeni proces takole:

na anodi: $O_2 + 4e^- = 2O^{--}$, na katodi: $2O^{--} + C = CO_2 + 4e^-$; v celosti torej $O_2 + C = CO_2$, prav tako kot pri gorenju premoga. Elektroni, ki tečejo po vodniku, predstavljajo električni tok. ki opravlja lahko električno delo. V idealnem primeru potekajo vse zapisane reakcije reverzibilno in pri eni in isti temperaturi (izotermno). Toplote pri tem ne nastane nič. V takšnem primeru je izkoristek člena, to je razmjerje med oddanim električnim delom in potrošeno kemično energijo, lahko zelo blizu 100%.

Vendar je to na žalost le shema za delovanje členov na gorivo. V dejanskih izvedbah so členi obremenjeni z vrsto slabosti. Pri delovanju vsakega člena se sprosti nekaj toplote, zato so izkoristki malo manjši, kot smo pričakovali. Poleg tega je napetost odvisna od jakosti toka, ki ga člen poganja po električnem krogu: če jakost toka naraste preko določene vrednotti, se napetost člena močno zniža. Zato se zmanjša tudi električna moč, ki jo oddaja člen. Zmanjšanje je tolikšno, da predstavlja resno slabost členov na gorivo.

Tega pojava ni težko razumeti. Če naj potekajo reakcije kot pri opisani shemi, morajo priti v medsebojni dotik elektroda, elektrolit in gorivo ali oksidant. Elektroda namreč odvaja ali dovaja elektrone, po elektrolitu pritekajo ali odtekajo ioni, gorivo in oksidant pa sodelujeta pri reakcijah. Če enostavno pomočimo kovinski elektrodi v elektrolit, gorivo ali oksidant pa sta nad elektrolitom v plinskem stanju, že pride do zaželenih reakcij. Vršijo pa se lahko le v črti, kjer gladina elektrolita moči elektrodi. Zato potekajo zelo počasi in se pri zvečanju jakosti toka napetost zniža. To lahko delno odpravijo katalizatorji, ki pospešijo reakcije. Najbolji učinkovite pa so porozne elektrode z drobnimi luknjicami, skozi katere elektrolit ne more iztekati. S prve strani prodira v elektrodo po luknjicah elektrolit, z druge pa gorivo ali oksidant v plinskem stanju. Tako se izdatno poveča površina, kjer potekajo reakcije in je znižanje napetosti zaradi zvišanja jakosti toka manjše. Zato imajo vsi členi, ki utegnejo biti industrijsko zanimivi, gorivo in oksidant v plinskem stanju.

Prve poskuse s člen na gorivo je pred več kot sto leti delal v Angliji Grove. Opazil je, da steče tok po vodniku, s katerim zvežemo platinski elektrodi, ki sta pomočeni v žvepleno kislino, če je kislina okoli prve elektrode nasičena s kisikom, kislina okoli druge elektrode pa z vodikom. S členi na gorivo se je bavil tudi znani fizikalni kemik Ostwald, ki se je zavzemal za nadom stitev toplotnih strojev s členi na gorivo. Švicar Baur je raziskal več vrst členov na gorivo. Priporočil je naslednjo izvedbo člena na premog: v talino srebra, ki služi kot elektrolit, segata ogljena (premogova) in nikljasta elektroda. Ob ogljeni elektrodi, ki se neprestano troši, je plast boraksa, ob nikljasti elektrodi pa doteka zrak. Ta člen deluje le pri zelo visokih temperaturah.

Znanih je še dosti drugih izvedb, vendar so v zadnjem času omejili raziskave samo na člene na plinasta goriva: vodik, ogljikov monoksid in ogljikove vodike.

Družba General Electric v ZDA raziskuje člene na vodik in ogljikov monoksid. Cbe snovi sta v čistem stanju predragi, zato delajo poskuse s členi na vodni plin in na generatorski plin. Generatorski plin nastane v posebnih pečeh, generatorjih, če vodijo zrak preko razžarjenega koksa ali premoga. Vsebuje v glavnem dušik in ogljikov monoksid. Vodni plin, ki vsebuje v glavnem vodik in ogljikov monoksid, pa nastane, če vodijo vodno paro preko razžarjenega koksa ali premoga. V tem primeru lahko toploto, ki se sprošča med delovanjem člena, koristno izrabijo pri pridobivanju generatorskega in vodnega plina iz premoga. Takšni členi obratujejo pri temperaturah okoli 700° C. Kot elektrolit služi talina kakšnega alkalijskega karbonata.

S členi na propan se ukvarja družba Allis-Chalmers, ki je prišla v svojih prizadevanjih najdlje. Zgradila je uporabaen traktor, ki ga je preko elektromotorjev poganjala baterija členov na propan. V celoti nastane ta iz propana in kisika vodna para in ogljikov dioksid, kot pri gorenju propana. Izkoristek, ki so ga dosegli, pa je bil dokaj ugodnejši kot pri toplotnih strojih. Člen na propan je do sedaj izpolnil pričakovanja, vendar sodijo, da za proizvodnjo na veliko še ni zrel.

Členi na druge ogljikove vodike, predvsem na metan, tudi dosti obetajo. Preizkušajo jih v Angliji, za zdaj pa še niso kaj prida raziskani. Prav tako kot člen na propan so uporabni zato, ker je ravnanje z ugljikovini vodiki preprosto; dajo se voditi po ceveh in ne zapuščajo trdnega pepela kot n. pr. premog. Tudi ti členi obratujejo pri temperaturah okoli 700^0 C in imajo kot elektrolit talino alkalijskega karbonata.

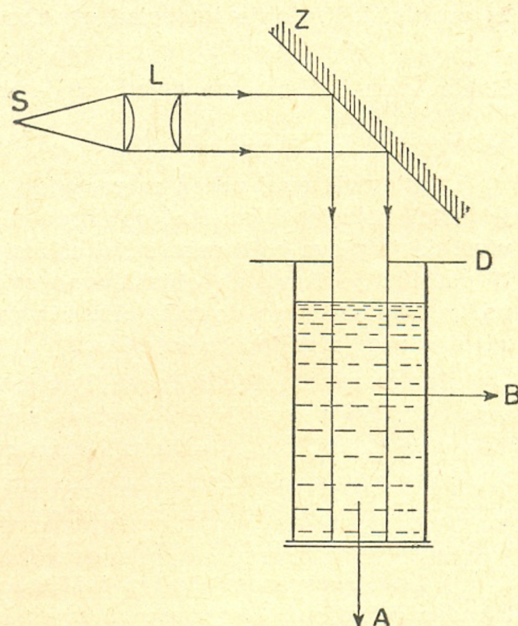
Predno bo člene na gorivo lahko uporabljala industrija, bodo pretekla najbrž še leta. Velike družbe, ki bi proizvajale člene na gorivo, pa si od njih nekaj obetajo. Na to se da sklepati po pospešenem raziskovanjuv zadnjem času in po tem, da svojih izsledkov zaradi konkurenčnega boja več ne objavljajo.

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Difuzija (rasipanje) svjetlosti

Pokazat ćemo kako se može demonstrirati pojava polarizacije svjetlosti pomoću difuzije.

Na sl. 1 snop zraka svjetlosti iz nekog izvora *S* (npr. Reuterova svjetiljka) učinimo paralelnim ili slabo konvergentnim. Sa zrcala Z snop se reflektira vertikalno prema dolje i upada u stakleni cilindar sa vodom koja sadrži malu količinu nekog rasipnog sredstva. Kao rasipno sredstvo možemo upotrebiti fluorescein, odnosno mlijeko (0,5 ml mlijeka na 1 500 ml vode). Na mjestu gdje snop zraka svjetlosti ulazi u cilindar stavimo diafragmu (na crnom papiru izrežemo kružni otvor). Time smo postigli da je snop zraka svjetlosti uži od cilindra i zbog toga povoljniji za promatranje. Promatramo li sada difuznu svjetlost, koja dolazi od tog snopa, u bilo kojem smjeru u horizontalnoj ravnini, sa nekim analizatorom* koji rotira, konstatirat ćemo da je ta svjetlost polarizirana.



Sl. 1.

Pokus će biti efektniji ako polarizator ne stavimo pred oko već ga stavimo na put zraka koje upadaju na zrcalo Z. Kad taj polarizator rotira, snop rasipne svjetlosti u cilindru mijenja intenzitet od maksimuma do minimuma. U ovom nam je slučaju analizator rasipno sredstvo.

* Vidi knjigu: B. Marković, Fizika za VIII. razr., Zagreb 1957 ,str. 68. sl. 49, polarizator.

Objašnjenje. U mnogim slučajevima nailazimo na intenzivno rasipanje svjetlosti zahvaljujući optičkoj nehomogenosti sredstva. Takovo je sredstvo na primjer dim (krute čestice u plinu) ili magla (kapljice vode u uzduhu, zatim razne suspenzije, koje predstavljaju mnoštvo krutih čestica, koje plivaju u tekućini, razne emulzije, a od čvrstih tijela mliječno staklo, opal itd.

Uvijek, kad svjetlost upadne na neko od ovih sredstava, javlja se jači ili slabiji efekt difuzije poznat pod nazivom *Tyndall-ov efekt.* Proučavanje difuzije u sredstvima gdje je veličina čestica razmjerno malena u odnosu na valnu dužinu svjetlosti (od $^1/_5$ do $^1/_{10}\,\lambda$), dovelo je do otkrivanja nekih zakonitosti, koje je eksperimentalno otkrio Tyndall, a teoretski objasnio Rayleigh.

1. Promotrimo na sl. 1 raspršenu svjetlost jednom u mjeru *B*, a drugi puta u smjeru *A*. Kod promatranja sa strane uočit ćemo, da rasipna svjetlost imade više plavičasti karakter, tj. bogatija je kratkim valnim dužinama; naprotiv svjetlost što prolazi kroz posudu u smjeru *A* čini se više crvena tj. boagtija je većim valnim dužinama. Kvantitativna ispitivanja pokazuju da, ako se ovisnost intenziteta upadne svjetlosti o valnoj dužini prikaže kao neka funkcija $f(\lambda)$, onda za rasipnu svjetlost ova ovisnost imade oblik $\frac{f(\lambda)}{\lambda^4}$. Prema tome intenzitet rasipne svjetlosti obratno je proporcionalan četvrtoj potenciji valne dužine (Rayleigh). Nije teško doći do tog zakona polazeći od predpostavke o sekundarnim valovima emitiranim zbog titranja elektrona. Amplituda vala, emitiranog zbog titranja elektrona proporcionalna je njegovom ubrzanju (samo kod pojave ubrzanja gibanja elektrona javlja se promjenljivo magnetsko polje i elektromagnetski val). Gibanja elektrona pod djelovanjem vala svjetlosti dobivamo po zakonu o harmoničnom titranju:

$$s = a \sin \omega t,$$

a njegovo ubrzanje:

$$s'' = -a\,\omega^2 \sin \omega t.$$

Iz ovog slijedi, da je intenzitet emitiranog sekundarnog vala svjetlosti

$$I \sim s''^2 \sim \omega^4. \tag{1}$$

Dakle intenzitet rasipne svjetlosti je proporcionalan četvrtoj potenciji frekvencije tj. obrnuto proporcionalan četvrtoj potenciji valne dužine $\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$.

Postavivši ovaj zakon za raspršenje svjetlosti na malim česticama, Rayleigh je (1871) pokušao iskoristiti dobivene rezultate za objašnjenje boje neba, pretpostavivši da je plava boja neba rezultat rasipanja sunčevih zraka u slojevima atmosfere. U početku je Rayleigh objašnjavao ovu pojavu prisustvom malih čestica prašine, no kasnije je došao do zaključka da je molekularna struktura atmosfere dovoljna za objašnjenje rasipanja svjetlosti.

Iz izraza (1) slijedi da se ljubičasta svjetlost rasipa 16 puta jače od crvene svjetlosti. Zbog toga bijela sunčeva svjetlost prelazi difuzijom u plavu boju neba. Takav je slučaj kod difuzije u čistom zraku (na visokim planinama, nad oceanom). Međutim prisustvo krupnijih čestica prašine (u gradovima) dodaje plavoj boji neba svjetlost, koja je odbijena na česticama prašine. Boja neba u gradovima nikada nije tako izrazito plava, kao u predjelima s atmosferom bez prašine.

Pojavu »crvenog« Sunca i Mjeseca pri njihovom izlazu i zalazu, tumačimo također difuzijom. Kad sunčeva svjetlost prolazi kroz slojeve atmosfere razne gustoće, onda se na pojedinim slojevima djelomično rasipa i to najintenzivnije svjetlost male valne dužine. Svjetlost, koja dopre do nas pretežno sadrži veće valne dužine (dnevna svjetlost je žuta). Kad je Sunce npr. na zapadu, put kroz atmosferu

je duži, pa su u svjetlosti koja je doprla do nas još više izražene veće valne dužine. (Sunce i Mjesec na zapadu su katkada potpuno crveni). Iz istog razloga dolazi i do pojave večernjeg crvenila na oblacima.

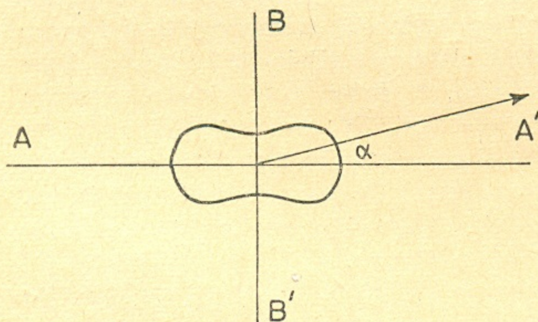
Ako mjerimo intenzitet svjetlosti raspršene u različitim smjerovima, to je raspored intenziteta simetričan obzirom na upadnu zraku i obzirom na pravac okomit na nju. Krivulja, koja grafički prikazuje raspodjelu intenziteta rasipne svjetlosti po pojedinim kutevima, naziva se indikatrisa raspršenja. Ako je upadna svjetlost nepolarizirana onda indikatrisa raspršenja imade u ravnini crtnje oblik prikazan na sl. 2. i dana se izrazom:

$$I_{\alpha} = (\lambda + \cos^2 \alpha) .$$

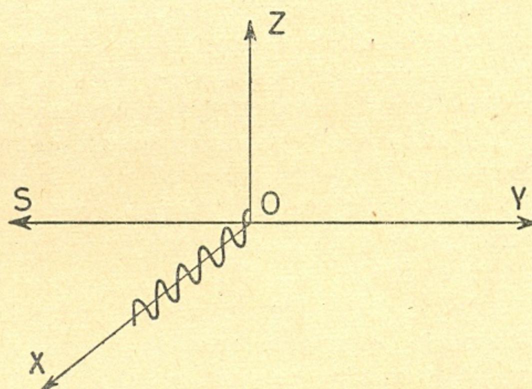
Prostornu indikatrisu dobit ćemo rotacijom slike oko osi AA'.

2. Promatramo li rasipnu svjetlost pod pravim kutom obzirom na upadnu svjetlost, ta je svjetlost polarizirana. To smo se eksperimentalno uvjerili. Kad nepolarizirana svjetlost pada na molekulu O u smjeru OY (sl. 3.) onda titranje njenog električnog polja leži u ravnini ZOX. Promatramo li rasipnu svjetlost u smjeru OX to će u tom smjeru prolaziti samo oni valovi, čije je električno polje okomito na os X u ravnini OZX.

Budući je boja neba posljedica difuzije svjetlosti znači da i ta svjetlost promatrana u smjeru okomito na spojnicu Sunce — naše oko mora biti polarizirana. U to se možemo uvjeriti, ako pred okom rotiramo analizator.



Sl. 2.



Sl. 3.

Na kraju moramo spomenuti, da sve ove zakonitosti prestaju biti valjane, ako je veličina čestica na kojima dolazi do raspršenja jednaka ili veća od valne dužine svjetlosti. Ova se pojava često događa kod promatranja na koloidalnim otopinama. Zavisnost intenziteta rasipne svjetlosti o valnoj dužini, kad dolazi do rasipanja na većim česticama, manje se primjećuje, tj. rasipna svjetlost je manje plava nego u slučaju manjih čestica. Osim toga takova difuzna svjetlost je polarizirana samo djelomično, pri čemu stepen polarizacije ovisi o velični i formi čestca. Raspodjela intenziteta rasipne svjetlosti po kutovima poprima također složeniji karakter. Dijagram rasipanja postaje nesimetrčan s obzrom na liniju BB', a u zavisnosti od veličine, oblika, prirode čestica i okolne sredine može poprimiti vrlo složene forme, sačuvavši simetriju samo u odnosu na smjer upadne zrake.

Branka Mikuličić, Zagreb

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Markantum de Dominis — Marko Gospodnetić

(1560—1624)

Povodom 400-godišnjice rođenja

Markantum de Dominis sigurno spada među ne baš malobrojne naše učenjake koji su svojim istraživanjima dali značajne priloge nauci. On nas zanima kao fizičar, iako njegovo djelovanje na ostalim područjima nije bilo maleno.

Napisao je dva djela iz područja fizike. U svom prvom djelu »*De radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride*« (O zrakama vida i svjetlosti u lećama i dugi), Venecija 1611. god., daje tumačenje nastajanja duge i to glavne i sporedne. Moramo znati da je to djelo izašlo gotovo sto godina prije Newtonova djela Optics (1704), i da se još onda nije ništa pobliže znalo o rasapu ili disperziji svjetlosti. Dominis tumači nastajanje duge lomom i refleksijom zraka Sunca na kapljicama kiše (i to refleksijom na unutrašnjoj strani kapljice). Nastajanje duge eksperimentalno je istraživao na šupljoj staklenoj kugli ispunjenoj vodom. Za taj rad Dominisa znao je Newton i to spominje u svom djelu Optics.

Drugo djelo Dominisa na području fizike je »*Euripus seu de fluxu et refluxu maris sententia*« (Eurip ili nauka o plimi i oseki), Rim 1642. god. U to vrijeme nije se znalo da postoji sila gravitacije, no Dominis ispravno zapaža da je uzrok plime i oseke Mjesec. On smatra da Mjesec privlači nekom »magnetskom silom« čestice vode oceana. Da bi rastumačio kako nastaju dvije plime za jedne ophodnje Mjeseca oko Zemlje, tj. za nešto više nego jedan dan, Dominis uzima da postoji još jedna točka na nebu koja je Mjesecu nasuprot, a koja isto tako privlači vode oceana kao i sam Mjesec. On još naglašava da se val plime oko Zemlje kreće brzinom ophodnje Mjeseca, ali da se s tim valom ne kreću čestice vode.

Danas nam ta Dominisova otkrića izgledaju možda naivna i trivijalna, ali u vrijeme kad su nastala bila su i te kako važan prilog općoj spoznaji fizičkih pojava.

Markantum de Dominis rodio se u Rabu (1560). Potomak je stare rapske porodice. Školovao se u Rabu, Loretu, a više studije završio je u Padovi, gdje je stupio u isusovački red. Zbog svojih, za ono vrijeme, naprednih gledanja na svijet istupio je iz isusovačkog reda. Bio je biskup u Senju, zatim nadbiskup u Splitu, ali ne slagajući se sa splitskim kanonicima i trogirskim biskupom, napušta Split i odlazi u Veneciju, a zatim u London, gdje izdaje političko djelo »*De republica ecclesiastica*« (1617). Zbog svog naziranja na svijet iznesenog u tom djelu, gdje dokazuje nevaljalost glavnih načela rimokatoličke crkve, bio je izopčen iz crkve. Njegov lični prijatelj, papa Grgur XV ga pridobije da se pokaje i vrati u Rim. Nakon smrti Grgura XV bio je zatvoren od Inkvizicije u Anđeosku tvrđavu gdje je i umro (1624). Njegovo tijelo, slika i sva djela spaljena su javno pred dominikanskom crkvom Santa Maria sopra Minerva, na trgu Campo de Fiore u Rimu, na onom istom trgu, gdje je na lomači pred četvrt stoljeća (1600) bio spaljen i znameniti Giordano Bruno.

Bra-Ma

Geometrijski red i čokolada malog Ivice

Mađarski matematičar László Kalmár, još kao učenik, ovako si je ilustrirao sumu beskonačnoga geometrijskog reda:

Prodavala se čokolada, u čiji je svaki staniolni omot domišljati proizvađač stavljao 1 kupon. Tko je prikupio i predao u trgovini 10 takvih kupona, dobio je — ne plativši više ništa — nov omot takve čokolade. Koliko zapravo vrijedi takav potpuni omot čokolade (zvat ćemo ga »bruto-čokolada«)?

Jasno je, da bruto-čokolada vrijedi više nego sama čista čokolada (zvat ćemo je »neto-čokolada«), jer je tu kupon, a 1

kupon vrijedi 1/10 nove bruto-čokolade, jer se za 10 kupona dobiva nova bruto čokolada. No 1/10 nove bruto-čokolade vrijedi više nego 1/10 neto-čokolade, jer joj pripada 1/10 kupona. Za 1/10 kupona možemo, bar u mislima, dobiti 1/100 bruto-čokolade. U 1/100 bruto-čokolade sadržana je 1/100 kupona, a za to bismo opet opet dobili 1/1000 bruto-čokolade, itd. itd. u beskonačnost. Razabiramo, da ovaj lanac zbrajanja nikad ne prestaje, pa prema tome 1 bruto-čokolada vrijedi

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots \quad \text{neto-čokolade.}$$

Mali Ivica u školi još ne uči geometrijske redove. Stariji brat mu je rekao, da je ta suma jednaka

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

Evo kako se Ivica uvjerio, da je ta suma tačna. Rasuđivao je: Ako sve skupa, tj. bruto-čokolada vrijedi $1\,{}^{1}/_{9}$ neto-čokolade, kako mi je moj brat rekao, onda to znači, da sam kupon vrijedi ${}^{1}/_{9}$ neto-čokolade, a to onda znači da za 9 kupona moram dobiti 1 neto-čokoladu. Idem u trgovinu.

Ivica, sa 9 kupona u džepu, obraća se trgovcu: »Molim jednu čokoladu. Pojest ću je ovdje i odmah zatim platiti!« Trgovac ga je dobro poznavao, pa mu je dao čokoladu na kratku »vjeresiju«. Ivica uzme omot čokolade, čokoladu pojede, a onaj 1 kupon priklopi k svojih 9 kupona. Pruži trgovcu 10 kupona (prema uvjetima proizvođača) i namirio mu je svoj dug.

Ivica je pojeo neto-čokoladu, kupona nema, a svojih 9 kupona je predao upravo za tu pojedenu čokoladu. Za 9 kupona dobio je neto-čokoladu, dakle za 1 kupon dobio je ${}^{1}/_{9}$ neto-čokolade. Prema tome je zaista 1 neto-čokolada + 1 kupon = 1 neto-čokolada + ${}^{1}/_{9}$ neto-čokolade = $1\,{}^{1}/_{9}$ neto-čokolade.

Mali Ivica je sumu beskonačnoga geometrijskog reda

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = 1\frac{1}{9}$$

praktično doživio, ne samo okom, već čak i želucem!

(Prema knjizi: R. Péter: Das Spiel mit dem Unendlichen.)

M. K.

Један пример генерализације у решавању геометријског задатка

Генерализовати значи прећи од расматрања једног објекта (или једне појаве) ка расматрању неког скупа који садржи тај објекат (одн. ту појаву). Генерализација је и прелаз од расматрања једног скупа ка расматрању неког ширег скупа који обухвата први скуп.

Генерализација је један од најважнијих мисаоних процеса који суделују при формирању логичких појмова и при систематисању и даљем развијању већ стеченог знања. Зато су и примери генерализације у учењу елементарне математике веома многобројни. Сваки прелаз од задатка са посебним бројевима на задатак исте врсте али са општим бројевима је генерализација. Она се појављује и у геометрији, на пример кад се од посматрања броја дијагонала код полигона од 4, 5, 6 итд. страна изведе опште правило за број дијалонала код полигона од n страна. Или кад се од проучавања тригонометријских функција оштрог угла пређе на функције макаквих углова.

Може се рећи да је сваки стварни напредак у учењу математике (такође и напредак у развоју математике као науке) везан за развитак способности уздићи се што више у домену апстракције и генерализације.

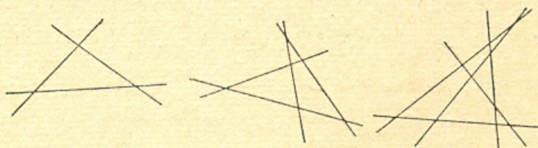
Износимо пример три сродна лакша задатка из планиметрије у чијем је решавању заступљена генерализација.

I задатак

У колико се највише тачака могу сећи 5 правих ?

Да би решили тај једноставан задатак ми полазимо од решавања још

простијих задатака о броју пресечних тачака за 3 и за 4 праве, те након цртања и посматрања директно увиђамо да се три праве могу сећи највише у 3 тачке, 4 праве у 6 тачака и најзад 5 правих у 10 тачака.



Сл. 1

А сада исти задатак генерализујемо: *У колико се највише тачака могу сећи n правих?*

Јасно је да даље цртање 6, 7, итд. правих не помаже много да се дође до решења, већ се задатак може решити ако се из три наведена посебна случаја изведе општи закључак: свака права сече сваку од осталих правих, дакле, ако је укупно n правих, онда на свакој од њих има n-1 тачака. Зато свега треба да буде $n(n\text{-}1)$ пресечних тачака, али с обзиром да је свака од њих заједничка за две праве, то је њихов стварни број двапута мањи, те је решење задатка: n правих могу се сећи највише у $\frac{n(n-1)}{2}$ тачака.

II задатак

У колико највише области деле раван n правих?

Јасно је, као и у претходном задатку, да ће највише области бити ако нема паралелних правих и ако кроз једну пресечну тачку не пролазе више од две праве. Дакле посматрајући као и у претходном задатку, лако увиђамо да 2 праве деле раван у 4 области, 3 праве у 7, и 4 праве у 11 области. Већ даље бројање, ако има 5 или више правих, постаје тешко и неће помоћи за генерализован задатак: случај n правих. А опште правило за број области не можемо лако уочити као што је био случај у претходном задатку.

Ипак посматрајући прелаз од случаја 2 праве на случај 3 праве, увиђамо да се претходном броју области додају три области више. Такође при прелазу од 3 на 4 праве видимо да се додају још 4 нове области. Према томе и при прелазу на 5 правих додаће се још 5 области, па и уопште при прелазу од n-1 на n правих додаће се још n области.

1 права	2 области
2 права	4 области
3 права	7 области
4 права	11 области
5 права	? области
. . . .	. . . .
n права	? области

Ако обележимо број области добијених од 2 праве са P_2, број области од 3 праве са P_3 итд. дакле и број области од n правих са P_n имаћемо следеће податке:

$$P_1 = P_0 + 1$$
$$P_2 = P_1 + 2$$
$$P_3 = P_2 + 3$$
$$P_4 = P_3 + 4$$
$$\cdots\cdots$$
$$P_{n-1} = P_{n-2} + (n\text{-}1)$$
$$P_n = P_{n-1} + n$$

Сабирањем свих ових једнакости добије се:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots + P_n = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_{n-1} + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n$$

а одатле: $P_n = P_0 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n\text{-}1 + n)$. С обзиром да је $P_0 = 1$ и да је збир првих n природних бројева: $\frac{n(n+1)}{2}$ имамо најзад:

$$P_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{тј.} \quad P_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Остављамо читаоцима да реше задатак:

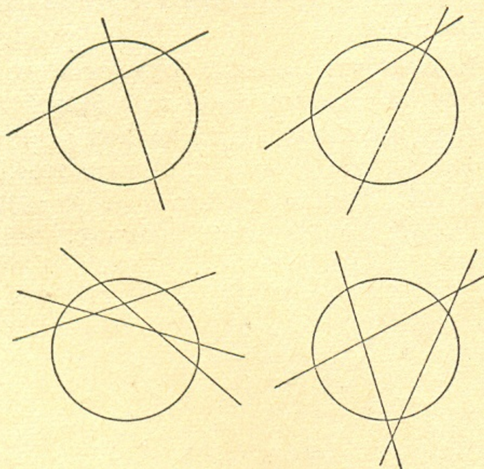
У колико је највише области подељена раван са n правих ако међу њима има m међусобно паралелних? (Посматрај најпре случај кад има 2 паралелне, затим 3, итд.)

III задатак

У колико највише области деле раван n правих и 1 кружница?

Посматрањем ових неколико посебних случајева увиђа се да има исти број области ако се све праве секу у

кружници, као и кад се секу и ван ње. Може се узети да се свих n правих

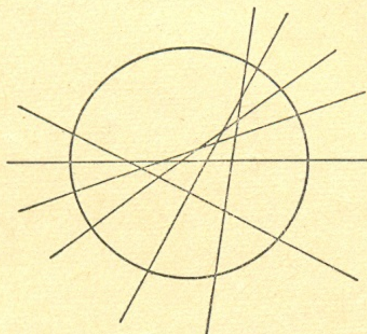


Сл. 2

секу у кружници, те, према претходном задатку биће укупан број области у кружници: $\frac{n^2+n+2}{2}$.

Део равни ван кружнице дели 1 права на 2 области, 2 праве на 4, 3 праве на 6, дакле: n правих на $2n$ области. Према томе укупан број свих области равни је:

$$\frac{n^2+n+2}{2}+2n \quad \text{тј.} \quad \frac{n^2+5n+2}{2}.$$



Сл. 3

Оставља се читаоцима да реше задатак: У колико највише области деле раван n правих и m концентричних кружница?

Б. Станојевић
Београд

Deset lakih pitanja, . . .
. . . na koje bi možda očekivali drugačiji odgovor

Dobro znamo, da kod sličnog povećanja nekog tijela omjeri odgovarajućih dužina ostaju sačuvani, a da kod toga površine rastu s kvadratom linearnih dimenzija, dok volumeni rastu s njihovim kubusom. Pa ipak te dobro poznate činjenice često vode do rezultata, koje unaprijed možda ne bismo očekivali. Oslanjajući se dakle samo na »osjećaj« o veličinama i odnosima među njima možemo lako pogriješiti. Promotrimo deset jednostavnih primjera, u kojima može doći do takvih okolnosti.

1. Trup nekog 100 m dugog ratnog broda izrađen je od čeličnih oklopnih ploča debelih 20 cm. Njegov model-igračka dug je 12 cm i izrađen iz lima debljine $\frac{1}{4}$ milimetra. Koji od ta dva broda je (relativno) masivnije građen?

Rješenje. Kod ratnog broda omjer duljine prema debljini ploče iznosi $\frac{100\,\text{m}}{0{,}2\,\text{m}} = 500$, a kod igračke $\frac{12\,\text{cm}}{0{,}025\,\text{cm}} = 480$. Igračka je dakle relativno masivnija, a brod je vitkiji!

2. Eiffelov toranj u Parizu visok je 300 metara, a na njegovu konstrukciju utrošeno je oko 8 milijuna kg čelika (tj. oko 800 vagona po 10 000 kg). Ako bi načinili slični model tornja visine jednog metra, bi li on težio više od pola kilograma?

Rješenje. Ako je G težina modela u kg, bit će, budući da se kod sličnih tijela volumeni (dakle uz isti materijal i težine) odnose kao kubusi linearnih dimenzija,

$$G : 8\,000\,000 = 1^3 : 300^3,$$

što daje $G = 0{,}296$ kg. Model bi dakle težio samo nešto više od četvrt kilograma! Znači, unatoč svoje velike težine, Eiffelov toranj je vrlo vitka konstrukcija.

3. Zemljina kugla ima polumjer od oko 6400 km, a najviša uzvisina na njoj (Mt Everest) visoka je 8883 metra. Čelična kuglica promjera 1 cm izbrušena

je tako točno, da najdulji zarez na njoj iznosi $\frac{1}{100}$ milimetra. Koja od ovih dviju kugala je relativno glađa?

Rješenje. Omjer »relativne hrapavosti« $\left(\frac{\text{neravnina}}{\text{polumjer}}\right)$ iznosi kod Zemlje približno $\frac{9\text{ km}}{6000\text{ km}} = 0{,}0014$, a kod čelične kuglice $\frac{0{,}01\text{ mm}}{5\text{ mm}} = 0{,}0020$. Zemlja je dakle glađa. Kuglica je 43% hrapavija!

4. Plod tropskog voća »avokado« često ima približno oblik kugle (promjera desetak centimetara). U sredini ploda nalazi se velika koštica oblika kugle, kojoj je promjer približno dvaput tolik, kolika je debljina sloja voćnog mesa oko koštice. Iznosi li volumen koštice više od 15% volumena čitavog ploda?

Rješenje. Neka je V volumen čitavog ploda avokada, v volumen njegove koštice, a 2r promjer koštice. Tada je

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{(2r)^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \text{ ili } v = 12{,}5\% \, V.$$

Volumen koštice iznosi dakle manje od 13% volumena čitava ploda.

5. Jaja promjera 4 cm stoje 16 dinara po komadu, a jaja promjera 5 cm 30 dinara. Kakva se bolje isplati kupiti? (Pretpostavljamo naravno, da su jaja slična, a pod »promjerom« razumijevamo manji promjer, dakle ne »duljinu« jaja.)

Rješenje. Označimo volumen većeg jaja sa V, a manjeg sa v. Tada je

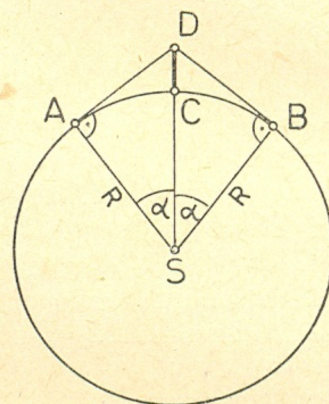
$$\frac{V}{v} = \frac{5^3}{4^3} \doteq 1{,}95.$$

Ako bi dakle veća jaja po jedinici sadržaja bila iste cijene kao manja, morala bi stajati $16 \cdot 1{,}95 = 31{,}3$ dinara. Budući da stvarno stoje samo 30 dinara, isplati se više kupiti veća jaja.

6. Zamislimo, da je Zemlja točna kugla, i da smo je oko ekvatora opasali remenom, koji je za 2 metra duži od opsega ekvatora. Da li bi se čovjek mogao provući između Zemlje i njenog opasača, ako ovaj mora biti oblika kružnice, koncentrične s ekvatorom?

Rješenje. Ako je R polumjer Zemlje, a R' polumjer opasača, bit će $2R'\pi = 2R\pi + 2m$ ili $R' - R = \frac{1\text{ m}}{\pi} \doteq 31{,}8$ cm. Kroz toliki razmak između opasača i Zemlje ne bi se normalnu čovjeku bilo teško provući.

7. Analogni zadatak kao prethodni, s time da je remen samo za 2 milimetra duži od ekvatora, ali da ga kod provlačenja smijemo zategnuti (ne rastegnuti!), tako da dijelom prilegne uz Zemlju. (Polumjer Zemlje iznosi oko 6400 km.)



Rješenje. Uz oznake prema slici zadano nam je:

Opseg remena $- 2R\pi =$

$= (\overline{AD} + \overline{DB}) - \widehat{ACB} = 2(\overline{AD} - \widehat{AC}) = 2$ mm,

$R = 6\,400$ km,

a traži se veličina $\overline{CD}$.

Kako je $\overline{AD} - \widehat{AC} = R(tg\alpha - \alpha)$, treba najprije naći α, za koji je

$$tg\alpha - \alpha = \frac{1\text{ mm}}{6{,}4 10^9\text{ mm}} \doteq 0{,}156 \cdot 10^{-9}.$$

Može se dokazati, da za male α (u lučnoj mjeri) vrijedi približno

$$tg\alpha - \alpha \doteq \frac{\alpha^3}{3},$$

pa je

$$\alpha \doteq \sqrt[3]{0{,}469 \cdot 10^{-9}} \doteq 0{,}777 \cdot 10^{-3}$$

(provjeri s tablicama!). Za ovaj kut pripadni luk $\widehat{ABC}$ iznosi

$$2R\alpha \doteq 6{,}4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}777 \cdot 10^{-3} \doteq 5\text{ km}.$$

Izračunajmo, koliko iznosi pripadna vrijednost od $\overline{CD}$. Kako je

$(\overline{CD} + R)\cos\alpha = R$, bit će $\overline{CD} = R\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$.

Može se dokazati, da za male α (u lučnoj mjeri) vrijedi približno ,

$$\frac{1}{\cos\alpha} - 1 \doteq \frac{\alpha^2}{2},$$

pa je

$$\overline{CD} \doteq 6{,}4 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{2} (0{,}777 \cdot 10^{-3})^2 \, m \doteq 1{,}93 \, m$$

(provjeri s tablicama!). Znači, normalan čovjek mogao bi čak bez sagibanja proći između Zemlje i njenog opasača!

8. Kod drobljenja kamena sortira se dobiveni tučenac sitima s okruglim rupama na frakcije prema veličini, tako da na pr. k-ta frakcija sadrži komade, koji su prošli kroz sito sa otvorima promjera $(k+1)$ cm, a zadržali se na situ s otvorima k cm. Ako uzmemo po 1 m^3 svake frakcije ,kako će se odnositi težine kamena u pojedinim volumenima?

Rješenje. U svakom volumenu bit će vrlo približno ista količina kamena, dakle i ista težina. U grubljoj frakciji bit će doduše veći komadi kamena nego u finijoj, ali će u istom omjeru biti veće i praznine između pojedinih komada. Zamislimo npr. 1 m^3 slično povećan, tako da mu se linearne dimenzije podvostruče. Time je ukupni volumen i kamena i praznina narasao $2^3 = 8$ puta, pa će se u $\frac{1}{8}$ tog volumena nalaziti opet ista težina kamena, kao kod prvotne, »dvaput finije« frakcije.

Iz istog razloga sadrži litra sitnih malina istu težinu malina kao i litra krupnih i slično. Dakako, uvijek je bitno da se uspoređuju grupe sličnih predmeta, jer to osigurava isti odnos ispunjenog prema neispunjenom dijelu prostora.

9. Ukupno pedesetak dana u godini puše u Palestini vjetar, koji se (po arapskom nazivu za 50) zove »hamsin«. Ovaj je vjetar dosta neugodan, naročito za doseljenike, koji na nj nisu navikli, jer je vruć i veoma suh, pa tijelu naglo oduzima vodu. Znalo se događati, da je ovo dovodilo i do smrti.

Hamsin je naročito opasan i neugodan za malu djecu. Zašto?

Rješenje. Uz istu temperaturu i vlažnost zraka bit će isparavanje (gubitak tekućine) približno proporcionalan s površinom kože čovjeka, dakle s kvadratom njegovih linearnih dimenzija. U drugu ruku, količina vode u čovjeku približno je proporcionalna s njegovim volumenom, dakle kubusom njegovih linearnih dimenzija. Opasnost od gubitka tekućine rasti će, kad raste relativni gubitak po jedinici volumena, a ovaj je zbog rečenog obrnuto proporcionalan linearnim dimenzijama čovjeka, dakle za dijete nepovoljniji nego za odraslog.

10. Da li bi — načelno — na Zemlji mogle postojati životinje po volji velikih dimenzija?

Rješenje. Ako neku životinju (u mislima, dakako!) slično povećavamo, rasti će joj volumen, dakle i težina, s kubusom linearnih dimenzija, a poprečni presjek kroz nogu samo s kvadratom linearnih dimenzija. To znači da će specifični pritisak po jednom cm^2 presjeka kosti nogu rasti proporcionalno s linearnim dimenzijama. Dakle kod izvjesne veličine životinje, ona bi se zdrobila uslijed svoje vlastite težine!

Vladimir Devidé, Zagreb

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

448. Поставити услов међу странама a, b и c троугла ABC кад се медиане (тежишне линије) повучене из B и C секу под правим углом.

Одредити у том случају геометриско место темена A, сматрајући да је страна BC стална.

449. Нека је $A(x)$ заједнички фактор полинома $P(x)$ и $Q(x)$. Показати да је у том случају $A(x)$ заједнички фактор и за полиноме $P(x) + Q(x)$ и $P(x) - Q(x)$.

На основу тога скратити разломак

$$f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 5x + 6}{2x^2 - 3x^2 + x - 6}.$$

450. У правоуглом координатном систему дате су тачке $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, тако да је $a > 0$, $b > 0$, $a < b$. Одредити на ординатној оси тачку M тако да је

$$\sphericalangle AMB = 2 \sphericalangle MBA.$$

451. У кругу датог полупречника $OA = 1\ dm$ уписан је трапез $ABCD$, тако да је његова основица AD пречник круга. Одредити $\sphericalangle BOA = \alpha$, тако *a*) да се у датом трапезу може уписати круг; *b*) да обим трапеза буде највећи.

452. Zadani su vrhovi trokuta $A(-6, 0)$, $B(2, 0)$ $C\left(\frac{2}{9}, 12\frac{4}{9}\right)$ i tačka $P(7, 5)$. Pravcem kroz P treba presjeći stranice trokuta: BC u D, i AC u E tako da četverokut $ABDE$ bude tetivan. Nađite površinu četverokuta i jednadžbu kružnice koja mu se može opisati!

453. Pravci $p_1 \equiv x - 2y + 4 = 0$ i $p_2 \equiv 3x + 4y - 18 = 0$ sijeku se u tački P. Nađi jednadžbu kružnice koja pravac p_1 dotiče u tački P, a na p_2 odsijeca tetivu duljine $\frac{20}{3}$!

454. Ako je u trokutu

$$\rho_c = \rho + \rho_a + \rho_b,$$

trokut je pravokutan.

455.* Dvije stranice trokuta su 6 *cm* i 12 *cm* a kut među njima 120°. Kolika je simetrala toga kuta?

456.* Dvije kružnice diraju se izvana u tački A. Zajednička vanjska tangenta dira ih u tačkama B i C. Dokaži da je kut BAC pravi.

457.* Izračunaj (bez trigonometrije) omjer stranica trokuta, ako je omjer kutova 3 : 4 : 5.

458. Ako je p prost broj veći od 3, dokaži da se $4p^2 + 1$ može napisati u obliku zbroja triju kvadrata.

Naputak. Svaki se prosti broj veći od 3 može napisati u obliku $6n \pm 1$.

459.* Rastavi u faktore:

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc.$$

460. Uzevši u obzir da kutovi

$$\frac{360°}{7}, \frac{180°}{7}, \frac{720°}{7}$$

mogu biti kutovi trokuta, dokaži da je

$$\cos\frac{180°}{7} \cdot \cos\frac{360°}{7} \cdot \cos\frac{720°}{7} = -\frac{1}{8}.$$

461. U trokutu ABC povučene su visine AA', BB', CC'; one sijeku opisani krug u tačkama A'', B'', C''. Neka se dokaže da je

1) $AA' = 2r \sin\beta \sin\gamma$, slično za BB' i CC';

2) $AA'' = 2r \cos(\beta - \gamma)$, slično za BB'' i CC'';

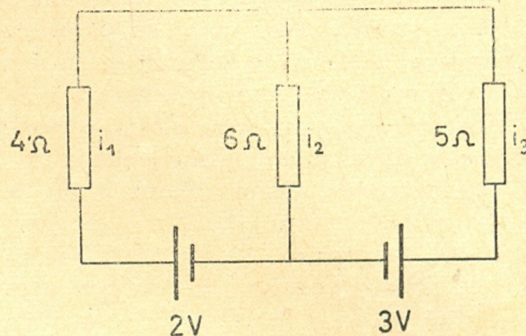
3) $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} = 4.$

B) Zadaci iz fizike

206. Automobil mase 900 kg jednoliko se usporava i zaustavi se u roku od 1 s na putu od 4 m. Kolika se energija kod toga pretvori u toplinu?

207. Kod normalnih uvjeta je gustoća nekog plina 1,42 $kg\,m^{-3}$. Kolika je gustoća tog plina kod tlaka od 4 at i temperature 27° C?

208. Zadan je krug struje prikazan na slici. Kolike struje po smjeru i po iznosu teku u pojedinim granama?



209. Promjenljivi kondenzator kapaciteta od 120 do 1 200 pF uključen je u titrajni krug. Kolika mora biti samoindukcija tog kruga da maksimalna rezonantna frekvencija bude 870 kHz? Kolika je tada maksimalna frekvencija?

210. Optički sistem sastoji se od dvije konvergentne leće žarišnih daljina 4 cm i 6 cm, međusobno udaljenih 10 cm. Nađite računom i konstrukcijom položaje slika, ako se predmet nalazi 12 cm ispred prve leće. Kakva je priroda slike i koliko je ukupno povećanje?

C) Rješenja iz matematike

434. *Data je jednadžba*

$$x^2 + 2x + m - 1 = 0. \quad (1)$$

a) *Ispitati egzistenciju i znak korijena za razne vrijednosti parametra m*;

b) *Pretstaviti kao funkciju od m izraze*

$$A = x_1^2 + x_2^2, \quad B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

zatim utvrditi, da li postoji takva vrijednost od m da je 1. $A = 0$, 2. $A = B$;

c) Odrediti one vrijednosti m za koje je $A > C$, gdje je $C = \frac{A}{B}$. Rezultat provjeriti na grafiku funkcije promjenljive veličine m: A i C.

a) Nađemo iz (1):

$D = 8 - 4m$, $D = 0$ za $m = 2$, $S = -2$,
$P = m - 1$, $P = 0$ za $m = 1$.

Karakteristične su vrijednosti: 1, 2.

Razlikujemo ove slučajeve:

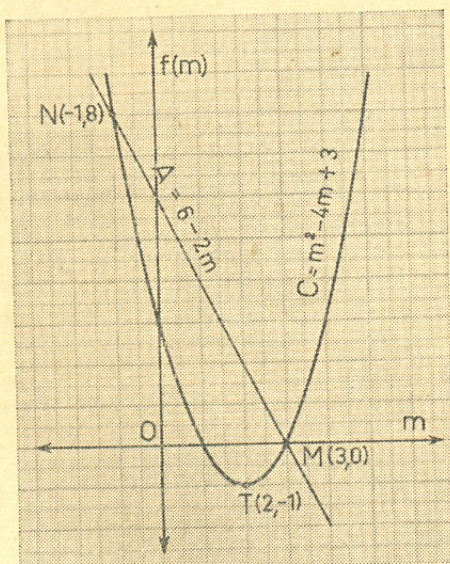
1) $-\infty < m < 1$, $D > 0$, $S = -2$, $P < 0$, $x_1 < 0 < x_2$;

2) $m = 1$, $D > 0$, $S = -2$, $P = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$;

3) $1 < m < 2$, $D > 0$, $S = -2$, $P > 0$, $x_1 < x_2 < 0$;

4) $m = 2$, $D = 0$, $S = -2$, $P > 0$, $x_1 = x_2 = -1$;

5) $2 < m < \infty$, $D < 0$: rješenja kompleksna.



b) Imamo:

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = 6 - 2m,$$

$$B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{2}{1 - m}.$$

1. $A = 0$ za $6 - 2m = 0$, $m = 3$. Vrijednost nemoguća, jer je za realne korijene $m \leqq 2$.

2. $A = B$ za $6 - 2m = \frac{2}{m-1}$, $m^2 - 4m + 2 = 0$; rješenja su $m_1 = 2 + \sqrt{2}$, $m_2 = 2 - \sqrt{2}$. Moguće je $m_2 = 2 - \sqrt{2}$.

c) Dato je:

$$C = \frac{A}{B} = \frac{6 - 2m}{\frac{2}{1-m}} = m^2 - 4m + 3.$$

Nejednadžba $A > C$ ispunjena je za

$$6 - 2m > m^2 - 4m + 3.$$

Sređivanjem dobijemo $-m^2 + 2m + 3 > 0$, rješenje $-1 < m < 3$, jer je $m \leqq 2$, ostaje kao rješenje $-1 < m \leqq 2$, za $m > 2$ rješenja su kompleksna, dakle

$$\underline{A > C \text{ za } -1 < m \leqq 2.}$$

Paar Vladimir. 4. a r. 5. g. »B. O.«, Zagreb

435. *Дата је дуж $AB = 2a$. У средини O те дужи подигнута је нормала и на њој нанесемо $OD = \frac{a}{2}$, тачке A и D спојене су правом AD, а из B је спуштена нормала BC на AD.*

а) Израчунати у функцији од a дужине AD, AC и BC.

б) Дуж DO продужена је $OE = a$ и конструисана права CE која сече AB у P. Показати да тачке A, C, B и E леже на истом кругу. Израчунати дужине AP и BP.

Из правоуглог троугла AOD је

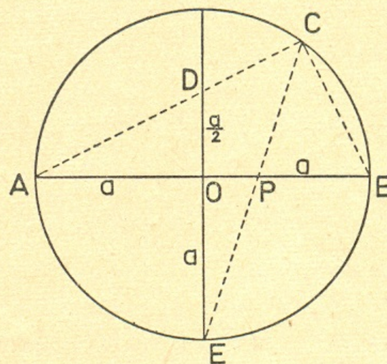
$$\overline{AD}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad AD = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

$\triangle AOD \sim \triangle ACB$ као троугли с једнаким угловима па су им хомологне стране пропорционалне тако је

$AD : 2a : AC$ или $AC = \frac{4a}{5}\sqrt{5}$, исто тако

$$a : \frac{a}{2} = AC : CB \text{ и одатле } CB = \frac{2a}{5}\sqrt{5}.$$

Јер је O средина хипотенузе правоуглог троугла ABC, то је $OA = OB = OC = a$.



Како је и $OE = a$, значи да су све четири тачке на истом кругу коме је средиште O и полупречник a.

Дуж CP је симетрала $\measuredangle ACB$, јер је $\measuredangle ACE = 45°$. $\measuredangle ACB = 90°$, па је и

$$\measuredangle BCE = 45°,$$

Зато је $PB : BC = AP : AC$ или

$$(2a - AP) : \frac{2a}{5}\sqrt{5} = AP : \frac{4a}{5}\sqrt{5}, \quad \text{одатле}$$

$$AP = \frac{4}{3}a, \quad BP = 2a - AP = \frac{2}{3}a.$$

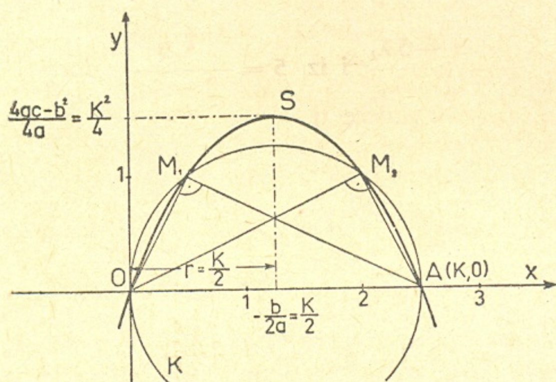
Јеремић Биљана, уч. 4_2 р. г. »Св. М.« Ниш

436. *Parabola $y = x(k - x)$ prolazi kroz koordinatni početak i siječe Ox u tački A. Koji uslov mora zadovoljiti k, ako na luku parabole OSA, gdje je S tjeme postoje dvije tačke M_1 i M_2 tako da je $\sphericalangle OM_1A = \sphericalangle OM_2A = 90°$? Odrediti u tom slučaju koordinate tačaka M_1 i M_2.*

Zadana parabola s tjemena u tački

$$S\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{4}\right)$$

siječe os x u ishodištu $O(0, 0)$ i tački $A(k, 0)$. Nad dužinom $OA = k$ kao promjerom, opišemo



krug K. Kutovi s vrhovima u tačkama M_1 i M_2, gdje krug siječe parabolu su pravi. Središte kruga ima koordinate $p = \frac{k}{2}$, $q = 0$, polumjer mu je $p = \frac{k}{2}$, te njegova jednadžba glasi;

$$k \equiv \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{k^2}{4},$$

što sređivanjem daje:

$$k \equiv x^2 - kx + y^2 = 0. \qquad (1)$$

Jednadžbu (1) riješimo sad s jednadžbom parabole

$$y = -x^2 + kx. \qquad (2)$$

Iz (2) dobijemo $kx = x^2 + y$, što uvrštavanjem u (1) daje: $x^2 - x^2 - y + y^2$ ili $y(y - 1) = 0$. Otuda imamo $y_1 = 0$, $y = 1$. U dalja razmatranja dolazi samo $y = 1$ ($y_1 = 0$ daje tačke O i A, u kojima se sijeku parabola, krug i os x).

Uvrstivši $y = 1$ bilo u (1) bilo u (2) dobivamo jednadžbu: $x^2 - kx + 1 = 0$. Prema zahtjevu zadatka (krug treba sjeći luk OSA parabole u dvije tačke) moraju postojati dva rješenja ove jednadžbe tj. mora biti $D > 0$, odnosno $k^2 - 4 > 0$, $(k - 2)(k + 2) < 0$ ili

$$\underline{k < -2, \quad k > 2.}$$

Ovo pretstavlja traženi uvjet, dok će rješenja gornje jednadžbe glasiti:

$$x_1 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Na kraju ordinate tačaka M_1 i M_2:

$$M_1\left(\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}, 1\right), \quad M_2\left(\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}, 1\right)$$

Slika prikazuje grafičko rješenje zadatka za $k = \frac{5}{2}$. Na osnovu gornjega dolazi se računski do koordinata tačaka M_1 i M_2:

$$M_1\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad M_2(2, 1),$$

što se može lijepo provjeriti i na slici.

Imenšek Mladen, 4. g r. 7. g. Zagreb

437. *U istokračnom trapezu, u kom su osnovice $AB = 2a$, $CD = 2b$, upisan je krug sa središtem O. Pokazati da je $\sphericalangle BOC$ prav pa izraziti u funkciji od a i b polumjer r upisanog kruga, zatim površinu trapeza i dužinu koja spaja tačke u kojima upisani krug dodiruje krake trapeza.*

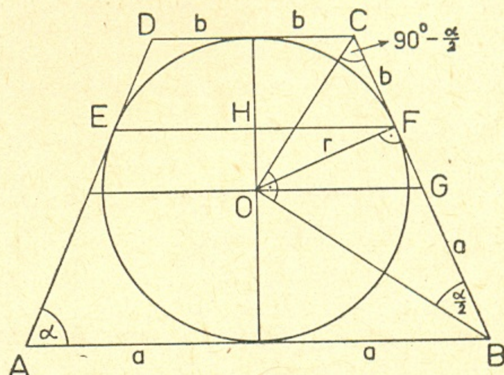
Ako je α kut što ga zatvara krak trapeza s bazom tada je

$$\sphericalangle CBO = \frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad \sphericalangle OCB = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Tada je

$$\sphericalangle BOC = 180° - \left(90 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

dakle $\sphericalangle BOC = 90°$, r je srednja geometrijska proporcionala dužina a i b dakle $r = \sqrt{ab}$.



Površina trapeza je $P = v \cdot s = 2r(a + b)$ tj. $P = 2(a + b)\sqrt{ab}$.

Iz sličnih trokuta

$$\triangle FGO \sim \triangle OHF \; (\measuredangle FOG = \measuredangle HFO)$$

izlazi

$$FO : GO = HF : OF \quad \text{ili} \quad FO^2 = GO \cdot HF$$

$$GO = \frac{s}{2} = \frac{a + b}{2}, \quad FO = r = \sqrt{ab}$$

i stavimo $HF = \frac{x}{2}$ imamo $ab = \frac{(a + b)\,x}{4}$,

te je tražena dužina $x = \frac{4ab}{a + b}$ $\quad (EF = x)$.

Marinović Ante, uč. 4. g r. 7. g. Zagreb

438. *Stranice a, b i c trokuta ABC pripadaju redom pravcima:* $x - 2y + 1 = 0$, $x + y - 8 = 0$, $x - y + 2 = 0$. *Pravac DE dijeli stranicu AB u omjeru* $AD : BD = -\frac{1}{2}$, *a stranicu BC u omjeru* $BE : CE = -3$. *U kojem omjeru dijeli pravac DE stranicu AC, a u kojem visinu trokuta ABC, koja izlazi iz vrha A?*

Nacrtajmo sliku. Najprije ćemo odrediti sjecišta pravaca p_1, p_2 i p_3 tj. tačke A, B i C.

Nalazimo $A(3, 5)$, $B(-3, -1)$ i $C(5, 3)$.

Kako tačka $D(x, y)$ dijeli dužinu AB u omjeru $AD : BD = -\frac{1}{2}$ tada njezine koordinate dobivamo iz

$$x_1 = \frac{3 - \left(-\frac{1}{2}\right)(-3)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)},$$

$$y_1 = \frac{5 - \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

tj. $D(1, 3)$, slično dobivamo i tačku $E(3, 2)$.

Jednadžba pravca tačkama $D(1, 3)$ i $E(3, 2)$ je $p_4 \equiv x + 2y - 7 = 0$.

Kako je visina $\triangle ABC$ koja izlazi i vrha A okomita na stranicu a, to će koeficijent smjera visine biti $k = -2$, a pošto prolazi kroz tačku $A(3, 5)$ to je njezina jednadžba $y - 5 = -2(x - 3)$ tj. $p_5 \equiv 2x + y - 11 = 0$.

Sada odredimo sjecište visine i stranice a, tj. tačku F koju dobijemo kao sjecište pravaca p_5 i p_1 tj. $F\left(\frac{21}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

Da nađemo omjer u kojem pravac D dijeli stranicu AC, kao i visinu iz A, trebamo naći sjecišta pravaca DE i AC, kao i pravca D i p_5.

Sjecišta pravca p_4 i p_2 je tačka K,

„ „ p_4 i p_5 „ „ L.

Izračunamo li dobijemo $K(9, -1)$, $L(5, 1)$.

Iz $AK : CK = \lambda_1$ dobijemo omjer u kojem pravac DE dijeli stranicu AC, a iz $AL : FL = \lambda_2$ dobijemo omjer u kojem pravac DE dijeli visinu trokuta ABC iz vrha A.

Iz $9 = \frac{3 - 5\lambda_1}{1 - \lambda_1}$ i iz $5 = \frac{3 - \frac{21}{5}\lambda_2}{1 - \lambda_2}$ dobijemo tražene omjere tj.

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \quad \text{i} \quad \lambda = \frac{5}{2}.$$

Marinović Ante, uč. 4. g r. 7. g. Zagreb

439. *Из тачке* $A\left(\frac{31}{28}, \frac{28}{5}\right)$ *види се тетива BC круга* $x^2 + y^2 = 25$ *под углом* $\alpha = 45°$. *Ако су* $x_1 = -5$, $y_1 = 0$ *координате тачке B, колика је дужина тетиве BC?*

Права AB има једначину $x - 2y + 5 = 0$ чији је коефицијент правца $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$.

Права ACпролази кроз тачку $A\left(\frac{31}{5}, \frac{28}{5}\right)$ а има коефицијент правца $k = tg\,(45° + \alpha) =$

$= 3$, па је на основу једначине $y - y_1 = = k(x - x_1)$ једначина праве AC:

$$3x - y - 13 = 0.$$

Координате тачке C су решења једначина

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad 3x - y - 13 = 0.$$

Добијају се два пара решења:

$$x_1 = 3, \quad y_2 = -4; \quad x_2 = \frac{24}{5}, \quad y_2 = \frac{7}{5};$$

што значи да права и круг имају две заједничке тачке.

Дужине тетива израчунавају се на основу растојања двеју тачака

$$BC = 4\sqrt{5}, \text{ а } BC' = 7\sqrt{2}.$$

Вечански Драгомир, 4_2 2 г. Зрењанин

440. *Роба којој је цена a динара по килограму појефтини за $p\,\%$, а затим опет појефтини за $p\,\%$. Најзад јој је цена b динара килограм. Израчунати p.*

(Специјално: $a = 1000$, $b = 640$).

Имамо

$$a - \frac{ap}{100} - \left(a - \frac{ap}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = b \quad \text{или}$$

$$ap^2 - 200\,ap + 10000\,(a - b) = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{200\,a \pm 200\sqrt{ab}}{2a} = 100\left(1 \pm \sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

Специјално: $a = 1000$, $b = 640$,

$$p_{1,2} = 100\left(1 \pm \sqrt{\frac{640}{1000}}\right),$$

$$p_{1,2} = 100 \pm 100 \cdot \sqrt{0{,}64},$$

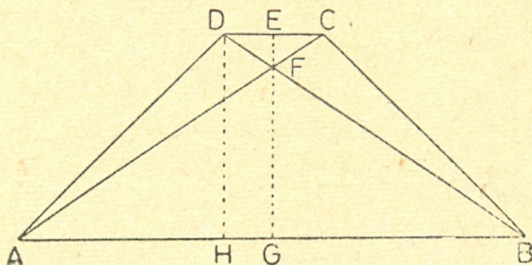
$$p_{1,2} = 100 \pm 100 \cdot 0{,}8,$$

$$p_1 = 20\,\%, \quad p_2 = 180\,\% \text{ отпада.}$$

Стојановић Бошко

уч. 4_1 р. г. »Б. Станковић« Врање

441. *Enakokraki tangentni trapez ima srednjico 10, a kot ob osnovnici 45°. Izračunaj (na 2 dec.) vrednost razmerja, v katerem deli sečišče diagonal diagonalo.*



Ker je to enakokraki tangentni trapez je krak enak srednjici.

$$AD = 10,$$

$$10 = AH \cdot \sqrt{2}, \text{ od tu } AH = 5\sqrt{2}.$$

Srednjica je

$$10 = AH + 2\,DE, \quad DE = \frac{5}{2}(2 - \sqrt{2}),$$

$$AG = AH + DE = \frac{5}{2}(2 + \sqrt{2}).$$

Izračunati moramo vrednost

$$\lambda = AF : FC,$$

ker pa je

$$\triangle AFG \sim \triangle DEF,$$

sledi

$$\lambda = AG : DE = \frac{5}{2}(2 + \sqrt{2}) : \frac{5}{2}(2 - \sqrt{2})$$

$$\lambda = 3 + 2\sqrt{2} = 5{,}83.$$

Franjo Lautar, dij. 4. r. g. Kočevje

442. *S pomočjo kongruence izračunaj ostanek deljenja števila 91234^{5128} s številom 7.*

Za število 91234 lahko pišemo:

$$91234 \equiv 3 \ (mod\ 7), \quad 91234^2 \equiv 2 \ (mod\ 7),$$
$$91234^3 \equiv -1 \ (mod\ 7), \quad 91234^6 \equiv 1 \ (mod\ 7)$$
$$5128 = 6 \cdot 854 + 4,$$
$$91234^{5128} = (91234^6)^{854} \cdot 91234^4$$

ker je $(91234^6)^{854} \equiv 1\ mod\ 7)$, dobimo

$$91234^{5128} \equiv 91234^4 \ (mod\ 7), \text{ ali}$$

$91234^{5128} \equiv 4\ (mod\ 7)$, ker je $91234^4 \equiv 4\ (mod\ 7)$.

Po delenju števila 91234^{5128} s številom 7 dobimo ostatek 4.

Pohar Florijan, 4. b r. g. Kranj

443. *Izvedi pomoću kongruencija pravila deljivosti brojeva 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13 u brojnom sistemu s bazom 12.*

Kad je osnova brojnog sistema 12 za pisanje brojeva potrebno je dvanaest znakova — cifara

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta$$

gde je $\alpha = 10$ i $\beta = 11$.

Svaki broj N u ovom sistemu se može pisati

$$N = a_n 12^n + a_{n-1} 12^{n-1} + a_{n-2} 12^{n-2} + \cdots + a_3 12^3 + a_2 12^2 + a_1 12 + a_0.$$

Kako je

$$12 \equiv 0 \ (mod\ 2), \quad 12^2 \equiv 0 \ (mod\ 2) \ldots$$

biće $N \equiv a_0 \ (mod\ 2)$.

Broj je deljiv sa 2 kad mu je zadnja cifra deljiva sa 2.

Kako je

$$12 \equiv 0 \ (mod\ 3), \quad 12^2 \equiv 0 \ (mod\ 3) \ldots$$

biće $N \equiv a_0 \ (mod\ 3)$.

Broj je deljiv sa 3 kad mu je zadnja cifra deljiva sa 3.

Kako je

$$12 \equiv 0 \ (mod\ 4), \quad 12^2 \equiv 0 \ (mod\ 4) \ldots$$

biće $N \equiv a_0 \ (mod\ 4)$.

Broj je deljiv sa 4 kad mu je zadnja cifra deljiva sa 4.

Kako je

$$12 \equiv 2 \ (mod\ 5), \quad 12^2 = -1 \ (mod\ 5),$$
$$12^3 = -2 \ (mod\ 5), \quad 12^4 = 1 \ (mod\ 5) \ldots$$

biće $N \equiv (a_0 + 2a_1) - (a_2 + 2a_3) + (a_4 + 2a_5) - - (a_6 + 2a_7) + \cdots \ (mod\ (5)$

ili $$N \equiv (a_0 - a_2 + a_4 \pm \cdots) + + 2 (a_1 - a_3 + a_5 \pm \cdots) \ (mod\ 5).$$

Kako je

$$12 \equiv 5 \ (mod\ 7), \quad 12^2 \equiv 4 \ (mod\ 7),$$
$$12^3 \equiv -1 \ (mod\ 7), \quad 12^4 \equiv -5 \ (mod\ 7),$$
$$12^6 \equiv -4 \ (mod\ 7)$$

biće $$N = (a_0 + 5a_1 + 4a_2) - - (a_3 + 5a_4 + 4a_5) + \cdots \ (mod\ 7).$$

Kako je

$$12^2 \equiv 0 \ (mod\ 8), \quad 12^3 \equiv 0 \ (mod\ 8) \ldots$$

biće $N \equiv 12a_1 + a_0 \ (mod\ 8)$.

Dakle, broj je deljiv sa 8 ako mu je dvocifreni završetak deljiv sa 8.

Kako je

$$12^2 \equiv 0 \ (mod\ 9), \quad 12^3 \equiv 0 \ (mod\ 9) \ldots$$

biće $N \equiv 12a_1 + a_0 \ (mod\ 9)$.

Broj je deljiv sa 9 ako mu je dvocifreni završetak deljiv sa 9.

Kako je

$$12 \equiv 1 \ (mod\ 11), \quad 12^2 \equiv 1 \ (mod\ 11),$$
$$12^3 \equiv 1 \ (mod\ 11) \ldots$$

biće $N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ (mod\ 11)$.

Broj je deljiv sa 11 kad mu je zbir cifara deljiv sa 11.

Kako je

$$12 \equiv -1 \ (mod\ 13), \quad 12^2 \equiv 1 \ (mod\ 13),$$
$$12^3 \equiv -1 \ (mod\ 13)$$

to je $N \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + + a_5 + \cdots) \ (mod\ 13)$.

Broj je deljiv sa 13 ako mu je razlika zbira cifara na neparnim i parnim mestima deljiva sa 13.

Pazi: u brojnom sistemu s bazom 12 dekadski broj 12 pišemo 10.

Dragoljub Aranđelović, 4_1 r. g. Svetozarevo

444. *S pomočjo kongruence pokaži, da je* $2^{2^5} + 1$ *deljivo s* 641 !

$641 = 2^6 \cdot 10 + 1$, ali napisano v obliki kongruence $2^6 \cdot 10 \equiv -1 \ (mod\ 641)$. Če to kongruenco potenciramo s 5 in nato pomnožimo s 4, dobimo

$$2^{2^5} \cdot 10^5 \equiv -4 \ (mod\ 641).$$

Ker pa je $10^5 \equiv 4 \ (mod\ 641)$, dobimo

$$2^{2^5} \equiv -1 \ (mod\ 641).$$

S tem pa je dokazano, da je $2^{2^5} + 1$ deljivo s 641.

Franjo Lautar, dij. 4. r. g. Kočevje

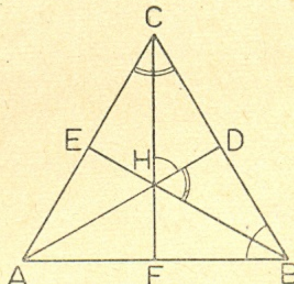
Napomena uredništva. Veliki francuski matematičar *Fermat* tvrdio je da je svaki broj oblika $2^N + 1$, gdje je $N = 2^n$, prost broj. *Euler* je prvi ispravio tu grešku našavši da je 2^{2^5}, kako smo pokazali, djeljiv sa 641.

445. *У троуглу ABC повучена је висина* $v_a = AD$ *те је* $HD = \frac{1}{3} AD$ *где је H ортоцентар троугла. Нека се докаже да постоје ове релације:*

$$tg\,\beta\, tg\,\gamma = 3, \quad 2\, tg\,\alpha = tg\,\beta + tg\,\gamma,$$
$$cos\,(\beta + \gamma) = 2\, cos\,\alpha.$$

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CHD = \beta$ и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BHD = \gamma$ као углови са нормалним крацима.

Из троугла ADB је $tg\,\beta = \dfrac{AD}{BD}$, док је из троугла BHD, $BD = \dfrac{AD\, tg\,\gamma}{3}$ што унесено у претходну једнакост даје $tg\,\beta\, tg\,\gamma = 3$.



Како је $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ вреди релација

$$tg\,(180° - \alpha) = tg\,(\beta + \gamma).$$

Ако развијемо израз помоћу адиционих формула и ставимо $tg\,\beta\, tg\,\gamma = 3$ добијамо релацију $2\, tg\,\alpha = tg\,\beta + tg\,\gamma$.

Пошто вреди релација $tg\,\beta\, tg\,\gamma = 3$ вреди и $3\, cos\,\beta\, cos\,\gamma = sin\,\beta\, sin\,\gamma$ или

$$cos\,\beta\, cos\,\gamma + sin\,\beta\, sin\,\gamma =$$
$$= -2\, cos\,\beta\, cos\,\gamma + 2\, sin\,\beta\, sin\,\gamma.$$

Израз на левој страни претставља

$$cos\,(\beta - \gamma),$$

док је десна страна једнака

$$-2\, cos\,(\beta + \gamma) = 2\, cos\,(180° - \beta - \gamma) = 2\, cos\,\alpha;$$

значи вреди и релација

$$cos\,(\beta - \gamma) = 2\, cos\,\alpha.$$

Вечански Драгомир, 4_2 2 г. Зрењанин

446. *Na kružnom kvadrantu OAB kruga polumjera r nalazi se tačka M. Iz M spusti se okomica MC na polumjer OB i spoji se M s A. Neka se odredi kut AOM = x tako da bude AM + 2 MC = d, gdje je d zadana dužina.*

Iz slike se vidi da je

$$\frac{AM}{2} = r \sin\frac{x}{2}, \quad AM = 2r \sin\frac{x}{2},$$

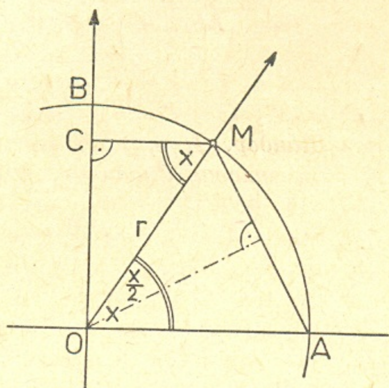
$$MC = r \cos x = r\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

a otuda izlazi

$$2\,MC = 2r - 4r\sin^2\frac{x}{2}.$$

Prema uslovu zadatka imamo jednadžbu

$$4r\sin^2\frac{x}{2} - 2r\sin\frac{x}{2} + d - 2r = 0 \qquad (1)$$



Kako x mora biti sadržano između 0° i 90° $\frac{x}{2}$ bit će sadržano između 0° i 45°, a $\sin\frac{x}{2}$ između 0 i $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nuždan i dovoljan uvjet da se samo jedno rješenje nalazi između 0 i $\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest da je $f(0)\, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$.

Jer je $f(0) = d - 2r$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = d - r\sqrt{2}$, imamo dalje $(d - 2r)(d - r\sqrt{2}) < 0$, odakle izlazi $r\sqrt{2} < d < 2r$.

Kako je $f(0) < 0$, znači da veći korijen zadovoljava zadatku. Lako se nalazi da je u tom slučaju $60° < x < 90°$. Za $d = r\sqrt{2}$, $x = 90°$.

Da se oba rješenja jednadžbe (1) nalaze između 0 i $\frac{\sqrt{2}}{2}$ treba da su ispunjeni uvjeti: rješenja moraju biti realna tj. $D \geqq 0$; otuda $d \leqq \frac{9}{4} r$, 2) 0 i $\frac{\sqrt{2}}{2}$ moraju biti izvan intervala rješenja, što konkretno znači da treba biti $f(0) > 0$ i $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$, odatle dobivamo $d > 2r$ i $d > r\sqrt{2}$. Nadalje mora biti

$$0 < \frac{S}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tj.} \quad 0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

što je uvijek ispunjeno. Iz svega izlazi, dakle

$$2r < d < \frac{9r}{4}.$$

Za $d = 2r$, $x_1 = 0°$, $x_2 = 60°$ (M je u tački A odnosno na $\frac{2}{3}$ luka AB); za

$$d = \frac{9}{4}, \quad \sin\frac{1}{4}, \quad x \approx 29°.$$

Nalazi se da je u općenito slučaju

$$0° < x < 29° \quad \text{i} \quad 29° < x < 60°.$$

Imenšek Mladen, 4. g r 7. g. Zagreb

447. *Dat je sistem jednačina*

$$x^y = 9$$

$$\sqrt[y]{64} = 8\left(\frac{x}{3}\right)^3$$

a) Rešiti jednačinu bez upotrebe logaritamskih tablica.

b) Odrediti parabolu $y^2 - 2px = 0$ koja prolazi kroz tačku $M(x, y)$, gde je x, y rešenje date jednačine.

c) Kolika je zapremina tela koje nastaje rotacijom površine zahvaćene lukom parabole, tangentom u tački $M(x, y)$ i ordinatnom osom oko x ose?

a) $x^y = 9$

$$\sqrt[y]{64} = 8\left(\frac{x}{3}\right)^3; \quad \sqrt[y]{4^3} = \left(\frac{2}{3}x\right)^3; \quad 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^y x^y;$$

$$4 = \left(\frac{2}{3}\right)^y \cdot 9; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^y$$

$$y = 2$$

$$x = \pm 3$$

b) Rešenja datog sistema određuju dve tačke $M(3, 2)$ i $M_1(-3, 2)$. Posmatraćemo parabolu $y^2 - 2px = 0$ kroz tačku M. Smenom x i y koordinatama tačke M dobijamo: $p = 2/3$ pa je jednačina parabole

$$y^2 - \frac{4}{3}x = 0 \qquad (1)$$

c) Jednačina tangente kroz M je:

$$y - y_M = y'(x - x_M) \qquad (2)$$

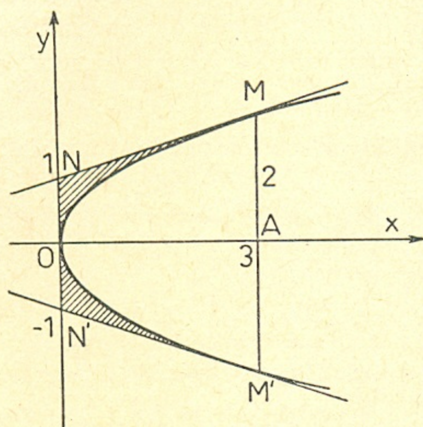
Ako diferenciramo jednačinu (1):

$$2yy' - \frac{4}{3} = 0; \quad y' = \frac{1}{3}$$

pa je jednačina (2):

$$y = \frac{x}{3} + 1.$$

Tangenta, odakle, seče $0y$ osu u $N(0, 1)$.



Kako je tražena zapremina jednaka razlici zapremine zarubljene kupe, nastale rotacijom trapeza $OAMN$ i paraboloida nastalog rotacijom parabole (1) oko ose Ox biće:

$$V = \frac{\pi x_M}{3}(y_M^2 + y_M y_N + y_N^2) -$$

$$- \pi \int_0^3 y^2 dx = 7\pi - \pi \int_0^3 \frac{4}{3} x\, dx =$$

$$= 7\pi - \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^3 = 7\pi - 6\pi = \pi.$$

Dragoljub Aranđelović, 4_1 r. g. Svetozarevo

Riješili zadatke iz 1. broja

Andrić Ivan, 4. c r. 5. g. Zagreb, sve zadatke; *Aranđelović Dragoljub,* 4. r. g. Svetozarevo, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 445, 446, 447; *Bago Ante,* 4. c m STŠ Mostar, 434, 435, 437, 439, 440, 442, 446, 447; *Čokić Faruk,* 4. b r. gimn. Tuzla, 422; *Hotomski Petar,* 2_3 raz. 1. g. Zrenjanin, 435, 437, 440; *Imenšek Mladen,* 4. g r. 7. g. Zagreb, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446; *Jelovac Đorđe,* 3. a r. g. Vršac, 447 (djel.); *Kalmar Ferenc,* 2_5 r. g. Sombor, 435, 437, 440, 441; *Konja Gordana,* 2. c r. 2. g. »Braća Ribar«, Zagreb, 437, 441; *Kunc Branko,* 4. b r. 1. g. Zagreb, 438, 439; *Lautar Franjo,* 4. raz. g. Kočevje. sve zadatke; *Marinović Ante,* 4. g r. 7. gimn. Zagreb, sve zadatke; *Matošin Špiro,* 4. d raz, 5. gimn. »B. Ogrizović« Zagreb, sve zadatke; *Mitrović Radomir,* 4_2 r. g. Ćuprija, 434, 435, 437, 438, 439, 440, 441, 446 (djel.), 447 (djel.); *Paar Vladimir,* 4. a raz. 5. g. Zagreb, sve zadatke; *Peić Radmio,* 4. h r. 7. g. Zagreb, 434, 435, 436, 437, 438, 439 (djel.), 445; *Petrović Mato,* 3. d r. g. Slav. Požega, 434, 435, 437, 441, 445, 446; *Pohar Florijan,* 4. b r. gimn. Kranj, sve zadatke; *Potočnik Vinko,* 3. r. g. Škofja Loka, 437, 440, 441, 442; *Ružić Ivica,* Zagreb, 442, 447 (djel.); *Stanković Đuro,* 4. c r. g. Slav. Požega, 447 (djel.); *Stanojević S. Jevrosima,* 4. r. gimn. »Sv. Mark.« Niš, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 447; *Stevanović Dušan,* 3. razred gimn. Ćuprija, 435, 440; *Вечански Драгомир,* 4_2 раз. 2 г. Зрењанин, све задатке; *Гајић Милан,* 4_4 р. г. Крагујевац, 434, 435, 436, 437, 441, 447 (дјел.): *Јеремић Биљана,* 4_2 р. г. »Св. Марк.« Ниш, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 446 (дјел.), 447; *Ковач Шандор,* 3_1 р. 1. г. Зрењанин, 434, 435; *Кулматицки Владимир,* 4 раз. г. Лазаревац, 435, 437, 438, 440, 441; *Лугомирски Драгослав,* 4_4 р. г. Крагујевац, све задатке; *Мирчевски Борис,* 4 кл. гимн. »М. Ацев« Прилеп, 434, 435, 437, 438, 441, 442 (дјел.), 445, 446; *Палић Војислав,* 4_1 раз. г. Смед. Паланка, 434, 435; *Стефановић Јагода,* 3_2 р. гимн. Ћуприја, 434; *Стојановић Бошко,* 4_1 р. гимн. »Б. Станковић« Врање, 434, 435, 437, 440; *Тодоровић Ратомир,* 4_1 р. г. Смед. Паланка, 434, 435, 437, 440, 441; *Шарановић Милан,* 4 д р. г. Ћуприја, 435, 437, 439, 440, 445 (дјел.).

Naknadno stigla rješenja

Delinić Krešimir, učen. 4. građ. tehn. škole »R. Bošk.« Osijek, 434, 435, 436, 437, 438, 439; *Feher Kamil,* 4. r. gimn. Sombor. 434 (djel.), 435, 437; *Ivko Bogumir,* 4. d r. gimn. »B. Ogriz.« Zagreb, 434, 435, 437, 438, 439, 440, 441; *Janković Branimir,* 4. a r. 2. gimn. »B. Ribar« Zagreb, 438 (djel.), 439; *Koršoš Arpad,* 4. v raz. g. Vršac, 434, 435, 440, 447 (djel.); *Maček Vilko,* 4. b r. 2. g. Ljubljana, sve zadatke: *Miletić Srbobran,* 4. raz. gimn. Ćuprija, 435, 437, 440, 441; *Milojković Božidar,* 4. raz. g. Ćuprija, 435, 437, 440, 441, 445: *Mitar Zdenko,* 4. b r. 6. g. Zagreb, 434, 435, 437, 438, 439, 441 447 (djel.): *Muždalo Milan,* 4. a r. gimn. Knin, 434, 435; *Obradović Marko,* 3. raz. S. T. Š. Virovitica, 446 djel.); *Paib Lojo,* 4. r. g. Foča, 435, 437, 440, 445;

Radović Milan, M-33-STŠ, Valjevo, 435, 437, 439; *Savić Zelen,* Teh. maš. šk. M_4 Titograd, 438, 439; *Stevanović Dušan,* 3_1 r. g. Ćuprija, 437; *Šaub Krešo,* 4. b r. 6. g. Zagreb, 435, 437, 438, 439, 440, 447; *Vučak Štefan,* 4. a r. g. M. Sobota, 434, 435, 440; *Weisser Marijan,* 3. d r. g. Sl. Požega, 434, 435; *Živković Ratko,* 3. a r. gimn. Knin, 435, 438, 439; *Јовановић Слободан,* 3_1 р. г. Ћуприја, 434, 435, 437, 440; *Кулматицки Владимир,* 4 р. Лазаревац, 434, 436, 447; *Максић Тодор,* 4_2 раз. г. »Б. Ст.« Врање, 445, 447 (дјел.); *Миловановић Мирјана,* 3_4 римн. г. Ћуприја, 434 (дјел.), 435; *Нешић Милан,* 4_1 р. гимн. Ћуприја, 434, 435, 437, 438, 439, 440, 441, 445; *Пиперски Драган,* 4_3 р. г. Приштина, 435, 438, 445; *Поточник Златко,* 3_5 разред 14 беогр. г. 434, 435, 437, 441, 445, 447; *Станојевић Зоран,* 1_3 раз. г. Ћуприја, 440; *Стојковић И. Петар,* 2_2 р. гимн. Ћуприја, 441, 446 (дјел.); *Тасић Д. Миле,* 2_3 раз. г. »Б. Ст.« Врање, 447 (дјел.); *Тодоровић Петар,* 4_4 раз. г. »И. Л. Рибар« Београд, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 446 (дјел.), 447 (дјел.).

Pravodobno stigla rješenja iz 4. broja

Andrić Ivan, 4. c r. 5. gimn. Zagreb, 433; *Lautar Franjo,* 4. raz. g. Kočevje, 420, 421, 422, 423, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431; 432, 433; *Mitar Zdenko,* 4. b r. 6. g. Zagreb, 420; *Mitrović Milorad,* 3. r, g. Nikšić, 421 (djel.), 422, 432; *Peić Radmio,* 4. b raz. 7. g. Zagreb, 421, 422, 425 (djel.), 426 (djel.), 427, 432 (djel.); *Potočnik Vinko,* 4. raz. g. Škofja Loka, 421, 427; *Максић Тодор,* 4. р. гимн. »Б. Станковић« Врање, 420, 421, 423, 432; *Мирчевски Борис,* 4 кл. гимн. »М. Ацев«, Прилеп, 420, 421, 422, 423, 427, 428, 431; *Николовски Иван,* 2_2 кл. гимн. »Цв. Димов« Скопје, 423; *Новак Дебељевић,* тех. школа (гео$_3$) Титоград, 423; *Тасић Миле,* 2_3 р. г. »Б. Ст.« Врање, 420, 421,432.

D) Rješenja zadataka iz fizike

201. *Silu $P = 20$ kp treba rastaviti na dve paralelne komponente P_1 i P_2. Komponenta $P_1 = 15$ kp i hvatište te sile je $a = 2$ m udaljeno od smjera sile P. Kolika je druga komponenta P_2 i gdje joj je hvatište?*

Резултанта две паралелне силе је једнака збиру тих сила а растојања се односе обрнуто као величине сила.

Значи да је

$P = P_1 + P_2$, тј. $P_2 = P - P_1 = 20 - 15 = \underline{5\ kp}$.

Из размера: $P_1 : P_2 = b : a$, где је b удаљеност хватишта силе P_2 од смера силе P_1 излази

$$b = \frac{P_1 \cdot a}{P_2} = \frac{15 \cdot 2}{5} = \underline{6\ m.}$$

Хватиште силе $P_2 = 5$ kp је $b = 6$ m удаљено од смјера силе P.

Галић Милан, уч. 4_4 р. г. Крагујевац

202. *Iz horizontalne cijevi koja je $L = 0,6$ m iznad zemlje istječe voda i pada $s = 1,75$ m daleko. Kolika je brzina v, vode koja istječe iz cijevi!*

Brzinu v kojom voda istječe izračunat ćemo kao brzinu horizontalnog hica.

Ako stavimo ishodište koordinatnog sustava na mjesto gdje voda istječe onda vrijede formule za horizontalni hitac:

$$x = vt, \quad y = -\frac{g}{2}t^2.$$

Eliminirajući t iz te dvije jednadžbe dobivamo

$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2, \quad \text{ili}$$

$$v = \sqrt{-\frac{gx^2}{2y}}.$$

Kako je $s = x = 1,75$ m, a $-y = L = 0,6$ m,

$$v = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 1,75^2}{1,2}} = \underline{5\ \mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

Brzina vode koja istječe iz cijevi je

$$v = 5\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Marinović Ante, uč. 4. g r. 7. g. Zagreb

203. *Jedna tekućina ima temperaturu t_1°C i specifičnu toplinu c_1, a druga tekućina ima temperaturu t_2°C i specifičnu toplinu c_2. Želimo dobiti smjesu od p kg tekućine čija je temperatura t°C. Koliko kg moramo uzeti jedne, a koliko kg druge tekućine?*

Ако од прве течности узмемо x kg, од друге ћемо узети $p - x$ kg.

Једначина топлотне равнотеже гласи:

$$c_1 x (t_1 - t) = c_2 (p - x)(t - t_2),$$

одатле:

$$x = \frac{pc_2 (t - t_2)}{c_1 (t_1 - t) + c_2 (t - t_2)}\ \mathrm{kg},$$

а

$$p - x = \frac{pc_1 (t_1 - t)}{c_1 (t_1 - t) + c_2 (t - t_2)}.$$

Јеремић Биљана, уч. 4_2 р. г.»Св. М.« Ниш

204. *Koju temperaturu ima voda, ako se 3 kg leda od 0°C polije s 4 kg kipuće vode? Latentna toplina talenja leda je 80 kgcal*

Da se stali led potrebuje:

$$Q_1 = q_t m = 80 \text{ kkal kg}^{-1} \cdot 3 \text{ kg} = 240 \text{ kkal toplote.}$$

4 kg kipeče vode usebuje 4 · 100 kkal = 400 kkal toplote.

Iz tega sledi, da se

$$400 - 240 \text{ kkal} = 160 \text{ kkal}$$

toplote porabi za segrevanje 7 kg vode (3 kg staljen led + 4 kg vode) od 0 °C na ϑ °C.

Iz $Q = m \cdot c \cdot \vartheta$ je

$$\vartheta = \frac{Q}{mc} = \frac{160}{7} = \underline{22{,}8\ °C.}$$

Voda ima temperaturu 22,8 °C.

Potočnik Vinko, dij. 3. r. g. Škofja Loka

205. *Унутарњи отпор неког елемента је 0,24 Ω. Кад је вањски отпор круга струје 5 Ω, јакост струје у том кругу је 0,36 A. Колика је електромоторна сила елемента?*

Пошто се ради о редној вези укупан отпор кола једнак је збиру појединих отпора:

$$R = R_1 + R_2 .$$

Према Омову закону, с обзиром да је јачина струје једнака у целом колу, следује:

$$E = I \cdot R = 0{,}36\ (0{,}24 + 25) = \underline{1{,}89\ V.}$$

Електромоторна сила елемента је 1,89 V.

Вечански Драгомир, уч. 4_2 р. 2. г. Зрењанин

Riješili zadatke iz 1. broja

Andrić Ivan, 4. c r. 5. g. Zagreb, 201, 202, 203, 204, 205; *Brkanović Pavao*, 2. r. gimn. »Ć. Gamulin« Split, 201, 203, 204; *Cerovečki Zdravko*, 3. a raz. g. Samobor, 201, 202, 203, 204, 205; *Feher Kamilo*, 4_4 raz. g. Sombor, 201; *Imenšek Mladen*, 4. g r. 7. gimn. Zagreb, 201, 202, 203, 204, 205; *Jelovac Đorđe*, 3. r. g. Vršac, 205; *Jesenko Jože*, 3. b r. g. Kranj, 201, 202, 203, 204, 205; *Kopač Vesna*. 2. d r. 1. g. Zagreb, 204; *Lautar Franjo*, 4. r. g. Kočevje, 201, 202, 203, 204, 205; *Marinović Ante*, 4. g r. 7. g. Zagreb, 201, 202, 203, 204, 205; *Mitrović Radomir*, 4 a r. gimn. Ćuprija, 201, 202, 204 (djel.), 205; *Peić Radmio*, 4. b raz. 7. g. Zagreb, 201, 202, 203, 204, 205; *Petrović Mato*, 3. d r. gimn. Sl. Požega, 201, 202, 203, 204, 205; *Pohar Florijan*, 4. raz. g. Kranj, 201, 202, 203, 204, 205; *Potočnik Vinko*, 3. r. g. Škofja Loka, 201, 202, 203, 204. 205; *Ružić Ivica*, Zagreb, 201, 202, 203, 204, 205; *Stanković Đuro*, 4. r. g. Sl. Požega, 201; *Stanojević Jevrosima*, 4 r. g. »Sv. Mark.« Niš, 203 (djel.) 205; *Stevanović Miroslav*, 3_4 r. g. Ćuprija, 201; *Šaranović Milan*, 4. r. g. Ćuprija, 204 (djel.), 205; *Šprem Franjo*, 3. c raz. gimn. »I. L. Ribar«, Osijek, 202, 204; *Вечански Драгомир*, 4_2 раз. 2. г. Зрењарин, 201, 202, 203, 204, 205; *Гајић Милан*, 4_4 р. гимн. Крагујевац, 201, 202, 203, 204, 205; *Јеремић Босиљка*, 4_2 р. г. »Св. Марк.« Ниш. 201, 203, 205; *Константинова Ђ. Милица*, 4_2 р. гимн. Ћуприја, 201, 204, 205; *Ковач Шандор*, 3_1 р. г. 1. гимн. Зрењанин, 201; *Кулманицки Владимир*, 4. раз. г. Лазаревац, 201, 202, 204, 205; *Паштровић Радомир*, 2_2 р. гим. Ћуприја, 201, 204; *Стефановић Јагода*, 3_2 раз. г. Ћуприја, 201, *Стојановић Бошко*, 4 раз. г. »Б. Станковић«, Врање, 201, 205.

Naknadno stigla rješenja

Ivanov Nikolinka, 2. raz. g. Ćuprija, 201, 202; *Jan Ivan*, gimn. »B. Semelić« Pula, 202, 204, 205; *Kelemen Aleksander*, 4. a raz. gimn. M. Sobota, 201, 203; *Konstantinović Đ. Milica*, 4_2 r. g. Ćuprija, 201, 204, 205; *Maček Vilko*, 4. b r. 2. g. Ljubljana, 201, 202, 203, 204, 205; *Milivojević Miodrag*, 4_1 r. g. Ćuprija, 201, 202, 204, 205; *Obradović Marko*, 3. raz. g. STŠ Visoko, 205; *Paar Vladimir*, 4. r. 5. g. Zagreb, 201, 202, 203, 204, 205; *Stanojević Milan*, 4. r. g. Ćuprija, 201, 202, 203, 204, 205; *Stevanović Dušan*, 3_1 r. gimn. Ćuprija, 201; *Vučak Štefan*, 4. a raz. g. M. Sobota, 201, 203, 204, 205; *Weisser Marijan*, 3. d raz. g, Sl. Požega, 204, 205; *Јовановић Слободан*, 3_1 р. гимн. Ћуприја, 201; *Лукић Милан*, 2_2 р. г. Ћуприја, 201, 204; *Максић Тодор*, 4_2 раз. г. »Б. Ст.« Врање, 201, 205; *Нешић Милан*, 4_1 р. г. Ћуприја, 202, 202, 204, 205; *Петровић Радомир*, 2_2 раз. г. Ћуприја, 201, 204; *Пиперски Драган*, 4_3 р. г. Приштина, 201: *Тасић Д. Миле*, 2_3 раз. г. »Б. Ст.« Врање, 201, 202, 205: *Sibrić Ivan*, 3. b r. g. Samobor, 201, 202, 203, 204. 205; *Matuka Franjo*, 4. r. g. Visoko, 202, 205.

Pravodobno stigla rješenja iz 4. broja

Вечански Драгомир, 4_2 р. 2 г. Зрењанин, 196, 197, 198, 199, 200; *Andrić Ivan*, 4. c r. 5. g. Zagreb, 196; *Čokić Faruk*, 4. b raz. g. Tuzla, 198, 199; *Potočnik Vinko*, 4. r. gimn. Škofja Loka, 196, 197.

Pri zaključku lista stigla ova rješenja

Iz matematike: *Богданов Иван*, 4 р. г. »Ц. Димов«, Скопје, 434, 435, 437. 438, 440, 447 (дјел.); *Imanović Munever*, 4 r. g. Gradačac, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 447 (djel.); *Sibrić Ivan*, 3 b raz. g. Samobr, 435, 436, 437, 438. 439, 440, 441, 447; *Matuka Franjo*, 4. r. g. Visoko, 434, 435, 436, 440.

Vježbe za učenike srednjih škola

Primjena poučaka o kongruencijama na pokuse s brojem 9 i 11 kod računskih operacija

U prošlom smo broju dokazali ove poučke:

1. *Ostatak što ga dobijemo kad neki broj podijelimo s 9 isti je kao kad zbroj znamenaka toga broja podijelimo s 9.*

Npr. ostatak što ga dobijemo kad 12356 podijelimo s 9 je isti kao kad

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 17$$

podijelimo s 9; taj je ostatak $1 + 7 = 8$.

2. *Ostatak što ga dobijemo kad neki broj podijelimo s 11 isti je kad kad razliku između zbroja znamenaka na neparnim i parnim mjestima podijelimo s 11.*

Npr. Ostatak što ga dobijemo kad 12356 podijelimo s 11 je isti kao kad

$$(6 + 3 + 5) - (5 + 2) = 10 - 7 = 3$$

podijelimo s 11; taj je ostatak 3.

Pokažimo sad kako se kod množenja i dijeljenja čini pokus s brojem 9 i 11.

Ako je npr. A multiplikand, B multiplikator, C produkt, onda je

$$AB = C.$$

Neka je $A \equiv r_1 \pmod 9$, $B \equiv r_2 \pmod 9$, izlazi da je $AB \equiv r_1 r_2 \pmod 9$. Ako je sad $r_1 r_2 \equiv r \pmod 9$ mora biti $C \equiv r \pmod 9$.

Brojevi r_1, r_2, r određuju se na gore uavedeni način.

Ispitajmo pomoću pokusa s brojem 9 umnožak $65\,687 \cdot 853 = 56\,931\,011$.

Odredimo r_1; taj je isti kao kad

$$7 + 8 + 6 + 5 + 6 = 32$$

podijelimo s 9; broj 32 daje isti ostatak kao $3 + 2 = 5$; dakle je $r_1 = 5$. Odredimo sad r_2; taj je ostatak isti kao kad $8 + 5 + 3 = 16$ podijelimo s 9; dakle je $r_2 = 1 + 6 = 7$. Umnožak $r_1 r_2 = 35$, 35 podijeljeno s 9 daje ostatak $r = 8$, pa mora i 56931011 podijeljeno s 9 dati isti ostatak 8. Ako $5 + 6 + 3 + 1 + 0 + + 1 + 1 = 17$ (9 ne treba računati kao ni zbroj dviju znamenaka koje zajedno daju 9 npr. 6 i 3) dobivamo ostatak 8.

Oba se ostatka slažu; možemo zaključiti da je račun *vjerojatno* dobar; ako se oni ne bi slagali, račun bi sigurno bio pogrešan.

Slično se radi i pokus s brojem 11. I ovdje treba odrediti brojeve r_1, r_2 i r; ti se brojevi dobiju kad razliku između zbroja znamenaka na neparnim i parnim mjestima podijelimo s 11. Ostatak r_1 dobivamo kad

$$(7 + 6 + 6) - (8 + 5) = 19 - 13$$

podijelimo s 11, $r_1 = 6$; r_2 dobivamo kad $(3 + 8) - 5 = 6$ podijelimo s 11, $r_2 = 6$, ostatak r dobivamo kad $6 \cdot 6 = 36$ podijelimo s 11, $r = 3$; isti ostatak moramo dobiti kad $(1 + 0 + 3 + 6) - (1 + 1 + 0 + 5) = 10 - 7 = 3$ podijelimo s 11; ostatak je 3 i pokus se slaže.

Slično se može izvesti pokus s brojem 9 i 11 kod dijeljenja.

Ako je A dividend, B divizor, Q količnik, R ostatak, tad je $A = BC + R$.

Neka je $B \equiv r_1 \pmod 9$, $C \equiv r_2 \pmod 9$, $R \equiv r_3 \pmod 9$, tad je

$$BC + R \equiv r_1 r_2 + r_3 \pmod 9;$$

ako je $r_1 r_2 + r_3 \equiv r \pmod 9$, tad mora biti i $A \equiv r \pmod 9$.

Npr. $874\,659 : 256$ daje za količnik 3416 i ostatak 163, te je

$$874\,659 = 256 \cdot 3416 + 163;$$

kod pokusa s brojem 9 je $r_1 = 4$, $r_2 = 5$, $r_3 = 1$, $r_1 r_2 + r_3 = 21 \equiv 3 \pmod 9$. Isti ostatak mora biti i dividend podijeljen s 9; nalazimo da je zbroj znamenaka dividenda 39 te taj broj podijeljen s 9 daje doista ostatak 3.

Načinimo još pokus s brojem 11; nalazimo da je $r_1 \equiv (6 + 2) - 5$ tj. $r_1 = 3$, $r_2 \equiv (6 + 4) - - (1 + 3)$ ili $r_2 = 6$, $r_3 \equiv (3 + 1) - 6 \equiv \equiv -2 \pmod{11}$ ili $r_3 = 9$ (treba dodati 11 ili mnogokratnik od 11 ako hoćemo da dobijemo pozitivni ostatak) i onda je

$$r \equiv 3 \cdot 6 + 9 \pmod{11} \quad \text{ili} \quad r = 5.$$

Pokus se slaže, jer je također ostatak od 874659 podijeljen s 11 kongruentan

$$(9 + 6 + 7) - (5 + 4 + 8) \pmod{11}$$

tj. $r = 5$.

Slično se može načiniti pokus s brojem 9 i 11 kod kvadriranja i kubiranja i općenito kod dizanja na bilo koju potenciju.

Ako je $N \equiv r \pmod 9$, to je $N^2 \equiv r^2 \pmod 9$, ako je sad $r^2 \equiv r' \pmod 9$ to je i

$$N^2 \equiv r' \pmod 9.$$

Npr.
$$625^2 = 390\,625,$$
$$625 \equiv 4 \pmod 9,$$
$$625^2 \equiv 7 \pmod 9$$

mora biti $390\,625 \equiv 7 \pmod 9$ a to i jest jer je $2 + 5 \equiv 7 \pmod 9$.

Ili npr. pokus s brojem 11

$$625 \equiv 9 \pmod{11}$$
$$625^2 \equiv 81 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Onda mora biti i $390\,625 \equiv 4 \pmod{11}$, jer je $(5 + 6 + 9) - (2 + 0 + 3) = 20 - 5 \equiv 4 \pmod{11}$.

Razmatrajmo pokus s brojem 9 kod kubiranja.

Ako je $N \equiv r$ (*mod* 9), to je i

$$N^3 \equiv r^2 \ (mod\ 9);$$

ako je sad $r^3 \equiv r'$ (*mod* 9), mora biti i

$$N^3 \equiv r' \ (mod\ 9).$$

Npr. $256^3 = 16\,777\,216$,

$$256 \equiv 4 \ (mod\ 9),$$

$$256^3 \equiv 1 \ (mod\ 9)$$

pa mora biti i $16\,777\,216 \equiv 1$ (*mod* 9), a to jest, jer je $37 \equiv 1$ (*mod* 9).

Ili pokus s brojem 11; $256 \equiv 3$ (*mod* 11), $256^3 \equiv 5$ (*mod* 11), mora biti

$$16\,777\,216 \equiv 5 \ (mod\ 11),$$

a to jest, jer je

$$(6 + 2 + 7 + 6) - (1 + 7 + 7 + 1) =$$
$$= 21 - 16 \equiv 5 \ (mod\ 11).$$

Analogno možemo ispitati s pomoću broja 9 i 11 i složenije izraze, npr

$$64^2 \cdot 17 \cdot 23 - 56^2 \cdot 49 =$$
$$= 1\,601\,536 - 153\,664 = 1\,447\,872.$$

Zamijenimo svaki broj na lijevoj strani njegovim ostatkom s obzirom na broj 9 ili 11. Nalazimo

$$1^2 \cdot 8 \cdot 5 - 2^2 \cdot 4 = 40 - 16 \equiv 6 \ (mod\ 9);$$
$$1\,447\,872 \equiv 33 \ (mod\ 9) \equiv 6 \ (mod\ 9).$$

Ili pokusom s brojem 11.

$$9^2 \cdot 6 \cdot 1 - 1^2 \cdot 5 = 486 - 5 =$$
$$= 481 \equiv 8 \ (mod\ 11),$$
$$1\,447\,872 \equiv 15 - 18 \equiv -3 \equiv 8 \ (mod\ 11),$$

pa vidimo da se pokus slaže.

O prostim i složenim brojevima. Razlaganje složenih brojeva u proste faktore

Prirodni broj a djeljiv je prirodnim brojem b, ako se b nalazi u a bez ostatka tj. ako je $a \equiv 0$ (*mod* b). Broj b je *mjera* ili *divizor* broja, a broj a je *višekratnik* od b. Ako je $a \equiv 0$ (*mod* b), to je $a = bq$.

Npr. 48 je djeljivo s 3, jer je $48 \equiv 0$ (*mod* 3), 48 je višekratnik od 3, a 3 je mjera od 48.

Svaki je broj djeljiv s 1 i samim sobom. Brojevi koji su djeljivi samo sa 1 i samim sobom zovu se *prosti* brojevi. Npr. 7, 11, 19. Brojevi koji osim 1 i samog sebe imaju još i drugih mjera zovu se *složeni* brojevi. Npr. 15, 24, itd.

Broj 1 je djeljiv samo s 1 pa ga redovno ubrajamo među proste brojeve.

Ako se neki broj m nalazi u dva ili više brojeva bez ostatka, to se broj m zove *zajednička mjera* tih brojeva. Npr. 5 je zajednička mjera od 25, 45, 70, Kakvagod dva broja imaju uvijek zajedničku mjeru 1. Brojevi koji nemaju druge zajedničke mjere osim 1 zovu se *relativno prosti* brojevi. Relativno su prosti brojevi npr. 8 i 15.

Ako je $a \equiv 0$ (*mod* m) to je i $ac \equiv 0$ (*mod* m) tj.

Ako je neki broj m mjera broja a, on je mjera i svakog višekratnika broja a.

Ako je $a \equiv 0$ (*mod* m) i $b \equiv 0$ (*mod* m) to je i $a + b \equiv 0$ (*mod* m) i $a - b \equiv 0$ (*mod* m) tj.

Ako je neki broj mjera dvaju brojeva, on je mjera i od njihova zbroja i njihove razlike.

Svaki je složeni broj djeljiv s jednim prostim brojem.

Neka je a složeni broj, on ima konačni broj mjera različitih od 1 i od broja a, a jedna od tih mjera svakako je najmanja. Označimo je s m, m mora biti prost broj; jer kad bi m bio složen broj, imao bi opet jednu mjeru m', koja je manja od m. Ta bi mjera bila također mjera broja a, jer je a višekratnik od m, dakle bi m' koje je manje od m bila mjera broja m. To se protivi pretpostavci da je m najmanja mjera broja a.

Osnovno svojstvo složenih brojeva. Neka je a složeni broj; on je djeljiv sigurno jednim prostim brojem p_1 pa je

$$a = p_1 q \quad \text{gdje je} \quad q < a.$$

Ako je q prost broj, broj a je napisan u obliku produkta dvaju prostih faktora. Ako je q složen broj, on je opet djeljiv jednim prostim brojem p_2 te je $q = p_2 q_1$ i odatle

$$a = p_1 p_2 q_1 \quad \text{i} \quad q_1 < q.$$

Ako je q_1 prost, a je produkt prostih faktora, ako nije q_1 je djeljiv prostim brojem p_2 te je $q_1 = p_2 q_2$, $q_2 < q_1$ i odatle

$$a = p_1 p_2 p_3 q_2.$$

Količnici $q_1, q_2, q_3 \ldots$ sve se više i više umanjuju, napokon će se nužno naći posljednji kvocijent koji će biti prost broj, i broj a je napisan u obliku produkta prostih faktora.

Prosti faktori nisu nužno različiti; ako grupiramo sve one koji su jednaki, dobivamo konačno izraz oblika

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots$$

gdje su $p_1, p_2, p_3, \ldots$ različiti faktori, e_1 znači broj prostih faktora jednaki p_1, e_2 broj prostih faktora jednakih p_2 itd.

Kažemo da smo rastavili broj a u proste faktore.

Mjesto da počnemo s prostim faktorom p_1 i da pišemo $a = p_1 q_1$ mogli bismo poći od drugog kojeg prostog faktora npr od p_3 i pisati $a = p_3 q'$ i slično onda dalje zaključivati.

Ništa nam unaprijed ne kazuje da bismo morali u oba slučaja dobiti iste proste faktore.

Neka je

$$a = p_1^{e_1'} p_2^{e_2'} p_3^{e_3'} \ldots$$

drugi jedan rastvor u proste faktore.

Kako je p_1' mjera desne strane mora biti i mjera lijeve strane, dakle svaki prosti faktor desne strane mora se naći u lijevoj strani i obrnuto svaki prosti faktor lijeve strane mora se naći između onih na desnoj strani. Tako oba rastvora sadrže iste proste faktore.

Oni bi se mogli razlikovati jedino eksponentima tih faktora. Neka su dakle

$$p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots = p_1^{e_1'} p_2^{e_2'} p_3^{e_3'} \ldots$$

oba rastvora.

Uzmimo da je $e_1 > e_1'$: ako podijelimo obje strane s $p_1^{e_1'}$ imamo

$$p_1^{e_1 - e_1'} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots = p_2^{e_2'} p_3^{e_3'} \ldots$$

Prema tomu bi se p_1 nalazio u lijevoj strani a ne bi se nalazio u desnoj, što je nemoguće.

Slično $e_1 < e_1'$ dovodi do nemogućnosti, jer ako podijelimo obje strane s $p_1^{e_1}$, dobili bismo

$$p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots = p_1^{e_1' - e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} \ldots ;$$

dakle mora biti $e_1 = e_1'$.

Slično se zaključuje za ostale eksponente. Prema tomu možemo izreći poučak:

Svaki se složeni broj dade rastaviti u proste faktore samo na jedan jedini način.

Praktična metoda za rastavljanje brojeva u proste faktore nam je poznata; znamo npr. kako se nalazi da je $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Spomenimo međutim da se ta metoda može znatno pojednostavniti.

Primjer. Neka se npr. 700 000 rastavi u proste faktore. Imamo

$$700\,000 = 7 \cdot 10^5 = 7 \cdot (2 \cdot 5)^5 = 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7.$$

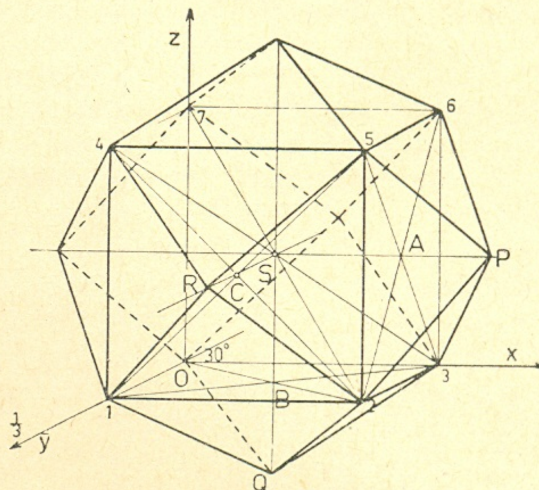
Lako se možemo uvjeriti da ona dovodi do istog rezultata kao i općenita metoda i to zbog toga što se složeni brojevi dadu rastaviti u proste faktore na jedan jedini način.

Kosa projekcija

(Nastavak)

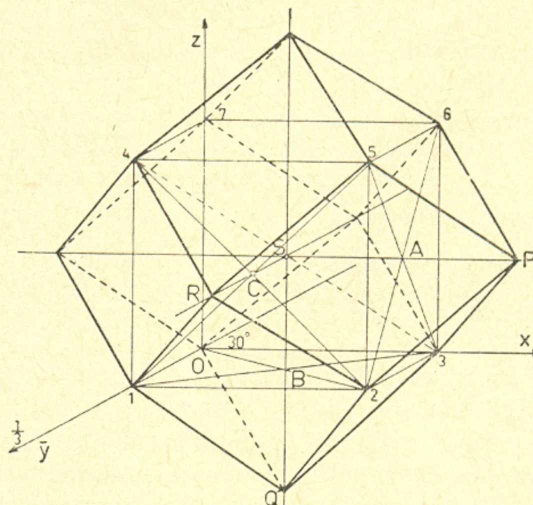
6. Nacrtaj tetrakisheksaedar u kosoj projekciji ($\alpha = 30°$ prikr. $^1/_3$). (ovakvo tijelo nastaje iz kocke tako, da na svaku pobočnu plohu kocke stavimo uspravnu piramidu) (sl. 12.)

Nacrtamo koordinatni sustav $O\overline{xzy}$ ($\alpha = 30°$) u tom sustavu nacrtamo kocku 1 2 3 0 4 5 6 7 tako da je $\overline{01}$ trećina od $\overline{03}$. Dijagonale kocke $\overline{34}$ i $\overline{27}$ daju središte kocke S. Dijagonale pobočki 26 i 35 te 02 i 13 i konačno 24 i 15 daju središta desne pobočke (A) donje pobočke (B) i prednje pobočke (C). — Spojnice



Sl. 12.

SA, SB i SC daju pravce u kojima su vrhovi piramida. Na pravcu SC uzimam po volji točku R kao vrh piramide na prednjoj pobočki i spojim ga sa 1254. — Dužinu RC prenesem triput na SA od A desno i dobijem P a to je vrh desne piramide koji spojen s 2, 3, 6, 5 daje desnu piramidu. — Konačno na pravac SB od B prenesem trostruki $\overline{RC}$ i dobijem vrh donje piramide koji spojen sa 123 O daje sliku donje piramide. Iz $\overline{SP}$, $\overline{SA}$ i $\overline{SR}$ prenošenjem na suprotne strane dobijem vrhove suprotnih piramida a ovi spojeni sa vrhovima pripadnih pobočki daju slike piramida.



Sl. 13.

7. Prikaži rombski dodekaedar u kosoj projekciji (sl. 13.) ako je $\alpha = 30°$ prikrata $^1/_3$ (U prošloj slici nacrtani tetrakisheksaedar prelazi u rombski dodekaedar, ako je visina svake piramide jednaka polovici brida kocke. Obje pobočke dviju susjednih piramida padaju onda u jednu ravninu tako da se broj pobočaka svodi sa 24 — tetrakisheksaedra — na 12.)

Rješenje: Kao u sl. 12. nacrtamo koordinatni sustav $Oxyz$ i u njemu kocku $O\,1234\,567$. Slično dobijem tačke S (središte kocke) ABC (središta pobočaka) i RPQ (vrhove piramide) samo za visinu piramide uzimam pola brida kocke. Tako je $\overline{SC} = \overline{RC}$ i $\overline{SA} = \overline{AP}$. Iz $\overline{SP}$, $\overline{SQ}$ i $\overline{SR}$ dobili smo vrhove suprotnih piramida. — Dobiveni vrhovi spojeni sa uglovima kocke daju sliku rombskog dodekaedra.

Zadaci. 1. Nacrtaj kosu projekciju kvadratične prizme ($a = 4$ cm, $v = 6$ cm) kojoj je baza u ravnini *a*) xy (π_1), *b*) xz (π_2) *c*) yz (π_3). — ($\alpha = 45°$, prikr. 1/2).

2. Nacrtaj kosu projekciju pravilnu šestorostrane piramide kojoj je osnovka u ravnini *a*) xy, *b*) yz), *c*) xz ako je $\alpha = 30°$ prikr. 1/2 a osnovni brid piramide $a = 3$ cm i $v = 5$ cm.

3. Nacrtaj kosu projekciju opeke (cigle) kojoj su najduži bridovi usporedni s osi x ($\alpha = 30°$ prikr. 2/3, mjerilo 1 : 5).

4. Nacrtaj kosu projekciju kocke ($\alpha = 45°$, prikr. 1/2, $a = 5$ cm); nađi središta svih bridova i spoji središta na istoj pobočki; ako odbaciš dijelove kocke do uglova s kakvim je plohama omeđen preostali dio kocke?

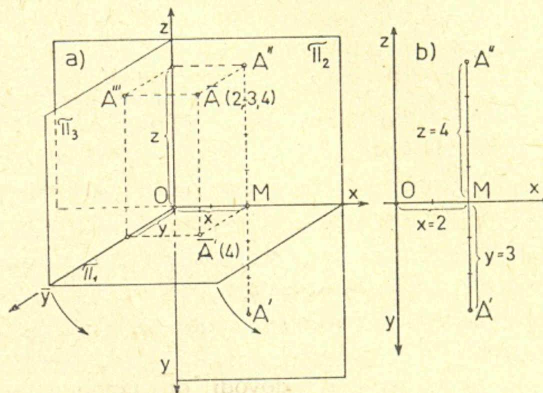
5. Prikaži u kosoj projekciji oktaedar ($\alpha = 30°$, prikr. 1/2, $a = 4$ cm) odsijeci mu sve uglove tako da je svaki brid prikraćen počev od vrha do $\frac{1}{4}$. S kakvim je plohama omeđen preostali dio oktaedra?

IV. Veza kose i ortogonalne projekcije

Određenost tačke u prostoru. — Koordinate tačke. Nacrtajmo 3 ravnine međusobno okomite (sl. 14a). Jednu smo uzeli horizontalno (π_1) a druge dvije vertikalno i to jednu frontalno (π_2) a drugu bočno (π_3). Te ravnine imaju zajedničku tačku O (prostorni ugao). — Presječnice tih ravnina su: os $0x$ (ili samo x) ravnina π_1 i π_2, os $0y$ (ili samo y) ravnina π_1 i π_3 a os $0z$ (ili samo z) ravnina π_2 i π_3. Ta tri pravca ($0x$, $0y$, $0z$) čine pravokutni koordinatni sustav.

Tačka prostora (A) je određena ako je vezana za stalan pravokutni koordinatni sustav (vidi $\overline{A}$, A', A'', A''').

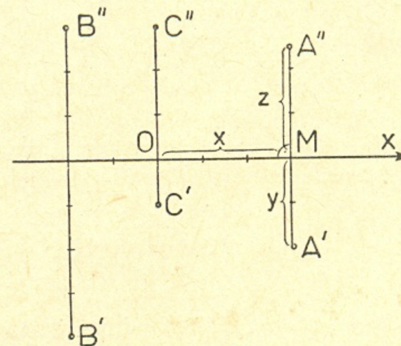
Ona je daleko od ravnine π_3 (yz) u smjeru osi x za apscisu x (ovdje 2), u smjeru osi y daleko je od ravnine π_2 (xz) za ordinatu y (ovdje 3), a u smjeru osi z daleko je od ravnine π_1 (xy) za aplikatu z (ovdje 4) te je $\overline{A'}$ kosi tlocrt, A'' je nacrt a $\overline{A'''}$ kosi bokocrt.



Sl. 14.

Ako zaokrenemo ravninu π_1 oko osi x do π_2 onda $\overline{A'}$ dolazi u okomicu $A''M$ na os x (vidi sl. 14b). Nastaje slika ortogonalne projekcije tačke na dvije ravnine i A'' (vertikalna ili druga projekcija ili nacrt) s A' (horizontalna ili prva projekcija ili tlocrt) leže u okomici na os x.

Iz navedenoga vidimo da je tačka A u prostoru određena sa 3 broja ($2 = x$, $3 = y$, $4 = z$); oni se zovu koordinate a zadaju se ovako: A (2, 3, 4).



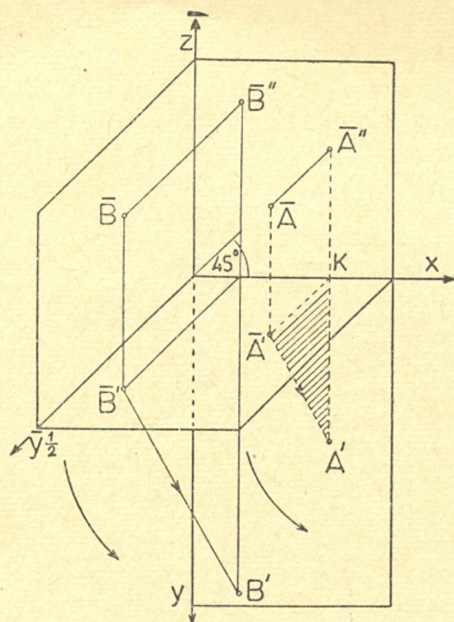
Sl. 15.

Prvi broj nanosi se po osi x od početka O do M. Drugi broj nanosimo u smjeru osi y i to (od osi x) dolje, a treći broj ide u smjeru osi z (od osi x) i to gore — (ako bi koji od

tih brojeva bio negativan nanosio bi ga od označena mjesta na suprotnu stranu)

Vježba: Nacrtaj tačke prostora u ortogonalnoj projekciji: A (3, 2, 2,5), B (— 2, 4, 3), C (0, 1, 3) (sl. 15). Uzmem os x i na njoj tačku O (početak). — Tački A apscisa $x = 3$ i od O odmjerim 3 po osi x do tačke M. Povučem okomicu na os x u tački M. — Prema dolje nanesem od osi x ordinatu $y = 2$ na tu okomicu i imam A', a prema gore nanesem od osi x aplikatu $z = 2{,}5$ i dobivam A''. Slično radim za tačku B ($-2 = x$, $4 = y$, $3 = z$) i za tačku C ($0 = x$, $1 = y$, $3 = z$).

1. Zadana je tačka A u kosoj projekciji; prenesi je u ortogonalnu projekciju (sl. 16). Neka je koordinatni sistem x, y i z, a uzeta je os $\overline{y}$ uz $\alpha = 45°$ i prikrata je 1/2. U njemu smo uzeli tačku A ($\overline{A}$, $\overline{A}'$ i $\overline{A}''$). Da pređem u ortogonalnu projekciju treba ravninu xy oko osi x zaokrenuti u π_2 (xz). Produžim ordinalu iz $\overline{A}''$ preko K i odmjerim od K na nju $2\,K\overline{A}'$ (jer je $K\overline{A}'$ pola originalne veličine) i dobivam A' a to je traženo jer $A'A''$ su ortogonalna projekcija tačke A.



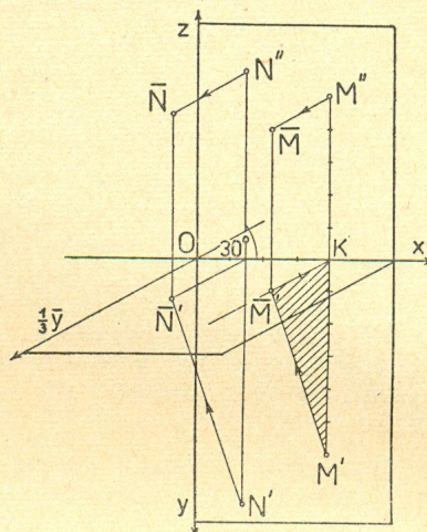
Sl. 16.

Važan je trokut $K\overline{A}'A'$ *i u njemu smjer* $\overline{A}'A'$. — Za svaku novu tačku ne moramo više mjeriti nego jednostavno iz kosog tlocrta povući paralelu sa smjerom $\overline{A}'A'$ i ta nam daje tlocrt u ortogonalnoj projekciji (kao npr. za tačku B gdje smo iz $\overline{B}'$ pomoću paralele dobiti B').

Navedeni trokut $K\overline{A}'A'$ zovu i *odredbeni trokut*. Služi nam da pomoću njega iz kosog tlocrta dobivamo ortogonalni tlocrt tačke i to ne posebnim mjerenjem za svaku novu tačku nego povlačenjem paralele sa smjerom $\overline{A}'A'$ iz kosog tlocrta.

S mjerenjem imamo posla samo za prvu tačku (A) dok nismo našli odredbeni trokut.

2. Zadana je u ortogonalnoj projekciji tačka M (4, 6, 5); prenesi je u kosu projekciju ($\alpha = 30°$, prikrata 1/3) (sl. 17).

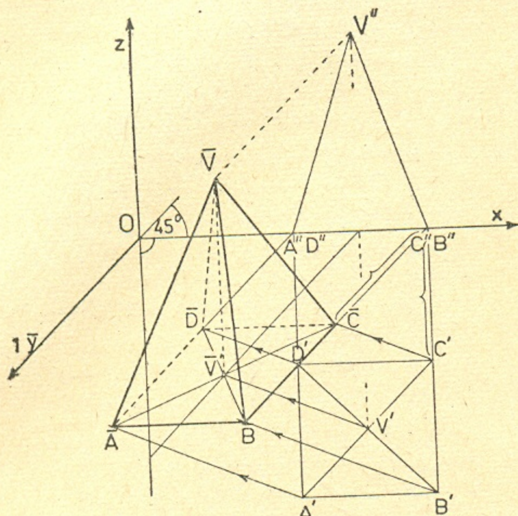


Sl. 17.

Uzmem os x i na nju okomito os y i z. Iz koordinata M (4, 6, 5) dobijem M' i M''. Da pređem u kosu projekciju uzmem kroz O os $\overline{y}$ pod 30° prema $+x$. — Kroz K povučem paralelu sa osi $\overline{y}$ i odmjerim na nju od K dužinu $1/3\ K\overline{M}'$ što mi daje $\overline{M}'$. U $\overline{M}'$ povučem paralelu sa osi z a iz M'' paralelu sa $\overline{y}$. — Sjecište ovih paralela je kosa projekcija tačke $\overline{M}$. I ovdje upozoravamo na važni odredbeni trokut $K\overline{M}'M'$ *i u njemu smjer* $M'\overline{M}'$. Za svaku dalnju tačku ne moramo više odmjeravati nego jednostavno iz tlocrta u ortogonalnoj projekciji povučemo paralelu sa smjerom $M'\overline{M}'$ i ta nam daje tlocrt u kosoj projekciji (kao npr. za točku N gdje smo iz N' pomoću paralele sa $M'\overline{M}'$ dobili $\overline{N}'$.

3. Zadana je pravilna četvorostrana piramida (s bazom u π_1) u ortogonalnoj projekciji; nacrtaj njezinu sliku u kavalirskoj perspektivi na temelju tlocrta i nacrta (sl. 18).

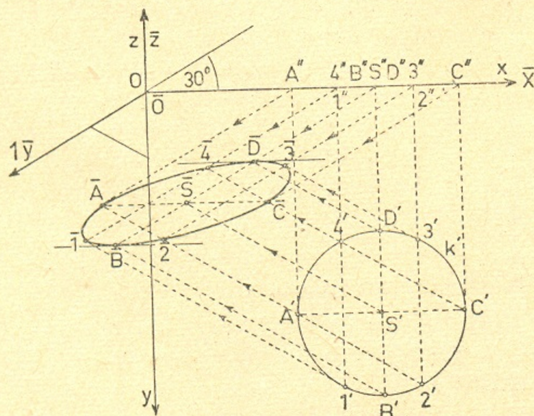
Povučemo os x i na nju okomicu u tački O. To su osi y i z. Zatim konstruiram kvadrat $A'B'C'D'$ i on s dijagonalama je tlocrt piramide. Iz tlocrta uzmem nacrt. Time je zadatak postavljen.



Sl. 18.

Uzmem os $\bar{y}$ pod 45° prema $+x$. — Iz C'' povučem paralelu s $\bar{y}$ i prenesem $B''C'$ na $C''\bar{C}$ i dobijem vrh $\bar{C}$. Trokut $C'C''\bar{C}$ je odredbeni. — Paralela iz B' sa $C'\bar{C}$ daje $\bar{B}$. Dalje povučem paralelu iz $A'' \parallel \bar{y}$ i iz A' i D' $\parallel$ sa $C'\bar{C}$, to daje $\bar{A}$ i $\bar{D}$. Spojene $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ daju kosi tlocrt baze piramide. U sjecištu dijagonala je $\bar{V}'$ a u $\parallel$ sa z je $\bar{V}$ gdje se ova siječe sa $\parallel$ iz V'' sa $\bar{y}$. — Spojnice $\bar{V}$ sa vrhovima baze su pobočni bridovi piramide.

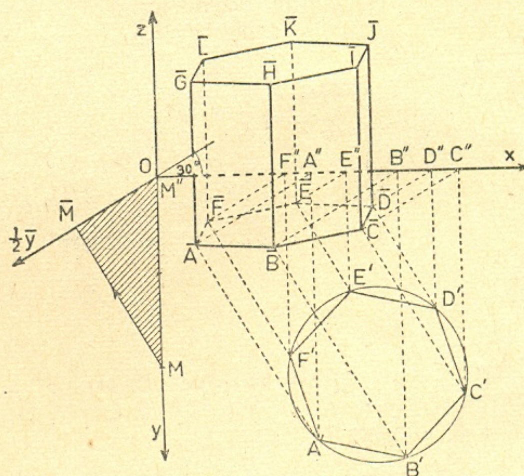
4. Zadana je kružnica u π_1 sa središtem $S\,(6, 6, 0)$ i $r = 2\,cm$; prikaži joj kosu sliku ako je $\alpha = 30°$, a prikrata je 1 (sl. 19).



Sl. 19.

Rješenje: Povučem Ox i iz $S\,(6, 6, 0)$ dobijem S' i S''. — Uzmem u šestar $2\,cm$ i opišem kružnicu oko S' (to je k') a K'' je u osi x (jer je kružnica u π_1). Uzmem kroz O $\bar{y}$ pod 30° prema $+x$. Označim tačke A, B, C, D, 1, 2, 3, 4 u obje projekcije. Kroz $S'' \parallel \bar{y}$ i $\overline{S''S'}$ prenesem na $S''\bar{S}$. — U trokutu $S'S''\bar{S}$ *važan mi je smjer* $S'\bar{S}$. Paralele s tim iz prvih projekcija ($A'B' \ldots 1'2' \ldots$) daju na paralelama iz drugih projekcija ($A''B'' \ldots 1''2'' \ldots$) sa $\bar{y}$ kose slike tačaka ($\bar{A}$, $\bar{B} \ldots \bar{1}$, $\bar{2} \ldots$). — Dijametri $\bar{A}\bar{C}$ i $\bar{B}\bar{D}$ su za elipsu konjugirani i iz njih se može konstruirati elipsu. — Možemo naći i još nekoliko tačaka (kao $\bar{1}$, $\bar{2} \ldots$) pa izvući elipsu. Kosa slika kružnice je elipsa. (Trokut $S'S''\bar{S}$ je *odredbeni*).

5. Zadana je baza pravilne šestorostrane prizme (u π_1) u ortogonalnoj projekciji; nacrtaj sliku prizme u kosoj projekciji na temelju tlocrta i nacrta baze (sl. 20) ($\alpha = 30°$, prikrata 1/2). — Visina prizme je povoljna.



Sl. 20.

Uzmem tačku O i iz nje povučem osi x, z, y i pod kutom 30° prema $+x$ nacrtam os $\bar{y}$.

U ravnini π_1 nacrtali smo tlocrt baze prizme a to je pravilni šestorokut $A'B'C'D'E'F'$. Na osi x je u okomicama nacrt baze

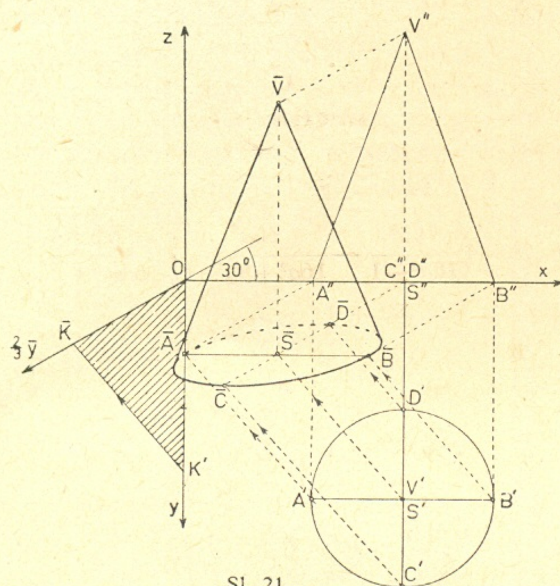
$$A''B''C''D''E''F''.$$

Da dobijemo kosu projekciju baze najprije nacrtamo odredbeni trokut $OM'\bar{M}$. (Tačku M' uzmem po volji na osi y a $\overline{O\bar{M}} = \frac{1}{2}\overline{OM'}$ spojim $M'\bar{M}$). Iz $A''B''C''D'' \ldots$ povučem paralele sa osi $\bar{y}$, a iz $A'B'C'D' \ldots$ paralele sa

$M'\overline{M}$. — Sjecište paralela iz A' A'' daje kosu sliku $\overline{A}$, paralela iz B' i B'' sliku $\overline{B}$ itd.

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots$ je kosa projekcija šestorokuta. U tim tačkama dignem okomice na π_1 (paralele sa z) i prenesem na njih visinu prizme (uzetu po volji). — To mi daje tačke $\overline{G}\overline{H}\overline{I}\overline{J}\overline{K}\overline{L}$. Gornja je osnovka sukladna s donjom i jednako položena.

6. Zadan je uspravni stožac u ortogonalnoj projekciji (s bazom u π_1); nacrtaj taj stožac u kosoj projekciji. ($\alpha = 30°$, prikrata 2/3) (sl. 21). Uzmem tačku O i iz nje povučem osi x, z, y i pod kutom 30° prema $+x$ nacrtam os $\overline{y}$.



Sl. 21.

Tlocrt baze stošca je kružnica oko S' a nacrt baze je u osi x. Vrh stošca ima tlocrt V' u S' a nacrt V'' iznad S''.

Iz OK' na osi y dobijem $O\overline{K}\left(=\frac{2}{3}OK'\right)$ a spojnica $K'\overline{K}$ zatvara odredbeni trokut $OK'\overline{K}$. — Odaberem u tlocrtu baze okomite diametre kružnice $A'B'$ i $C'D'$ i označim na osi x druge projekcije $A''B''C''D''$. Da dobijem kosu projekciju osnovnog kruga (koji ćemo najprije nacrtati) povučem iz $A''B''S''$-$C''D''$ paralele sa osi $\overline{y}$, a iz $A'B'S'C'D'$ paralele sa $K'\overline{K}$. — Sjecišta pripadnih paralela daju $\overline{A}\overline{B}\overline{S}\overline{C}\overline{D}$. — U $\overline{S}$ povučem paralelu sa osi z a iz V'' paralelu sa osi $\overline{y}$ i u sjecištu je $\overline{V}$ (kosa slika vrha stošca). — $\overline{A}\overline{B}$ i $\overline{C}\overline{D}$ su konjugirani dijametri elipse: konstruiram elipsu iz dijametara, a s vrha $\overline{V}$ povučem tangente na elipsu.

Vježbe za učenike 8. raz. osnovne škole i 1. raz. srednje škole

Rastavi u faktore:

1. $I = (3x - 2)^2 - 4(2x + 3)^2$.

Po formuli za razliku kvadrata $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ možemo pisati, ako stavimo $a = 3x - 2$, $b = 2(2x + 3) = 4x + 6$.

$I = (3x - 2 + 4x + 6)(3x - 2 - 4x - 6) = (7x + 4)(-x - 8) = -(x + 8)(7x + 4)$.

2. $I = 6ab - 9b - 4a + 6$.
$I = 3b(2a - 3) - 2(2a - 3) = (2a - 3)(3b - 2)$.

3. $I = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$.
$I = x^2(x + 3) - 9(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 9) = (x + 3)^2(x - 3)$.

4. $I = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$.
$I = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b - c)^2 = [a + (b - c)][a - (b - c)] = (a + b - c)(a - b + c)$.

5. $I = ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$.
$I = abx^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy = ax(bx + ay) + by(ay + bx) = (bx + ay)(ax + by)$.

6. $I = (ab + 1)^2 - (a + b)^2$.
$I = (ab + 1 + a + b)(ab + 1 - a - b) = [a(b+1) + b + 1][a(b-1) - (b-1)] = (b + 1)(a + 1)(b - 1)(a - 1)$.

7. $I = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - (x - 1)$.
$I = (x - 1)[(x - 2)(x - 3) + x - 2 - 1]$
$I = (x - 1)[(x - 2)(x - 3 + 1) - 1]$
$I = (x - 1)[(x - 2)^2 - 1]$
$I = (x - 1)(x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = (x - 1)^2(x - 3)$.

8. $I = a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$.
$I = a^3(b - c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2)$
$I = (b - c)[a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b + c)]$

Izraz u uglatoj zagradi jednak je

$a^3 - ab^2 - abc + b^2c - ac^2 + bc^2 = a(a^2 - b^2) - bc(a - b) - c^2(a - b) = (a - b)(a^2 + ab - bc - c^2) = (a - b)(a^2 - c^2 + ab - bc) = (a - b)[a^2 - c^2 + b(a - c)] = (a - b)(a - c)(a + c + b)$.

Zato je

$$I = (a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c).$$

9. Dijeljenjem nalazimo:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) : (a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc.$$

Odatle izlazi

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Na osnovu ove formule rastavi u faktore:

1) $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$,

2) $8x^3 - 1 - y^3 - 6xy$.

Nalazimo

$$a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = a^3 + b^3 + (-c)^3 - 3ab(-c) = (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc);$$

$$8x^3 - 1 - y^3 - 6xy = (2x)^3 + (-1)^3 + (-y)^3 - 3(2x)(-1)(-y) = (2x - 1 - y)(4x^2 + 1 + y^2 + 2x + 2xy - y).$$

Kako je

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2],$$

to je također

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

Pokaži rastavljanjem u faktore da je

10. $(a^4 - 2a^2b^2 - b^4)^2 - 4a^4b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 - 4a^2b^2 - b^4)$.

11. $(a + b)^2 - (c + d)^2 + (a + c)^2 - (b + d)^2 = 2(a - d)(a + b + c + d)$.

Izračunaj na najbrži način:

12. *a*) $99999^2 - 1$, *b*) $249^2 - 49^2$, *c*) $364^2 - 64^2$, *d*) $1001^2 - 1$;

a) $100\,000 \cdot 99\,998 = 9\,999\,800\,000$,

b) $298 \cdot 200 = 59\,600$,

c) $300 \cdot 428 = 128\,400$,

d) $1002 \cdot 1000 = 1\,002\,000$.

Skrati razlomke:

13. $$I = \frac{a^4 - 4a^2b + 4a^2b^2}{a^4 - 4a^2b^2}$$

$$I = \frac{a^2(a^2 - 4ab + 4b^2)}{a^2(a^2 - 4b^2)} = \frac{(a - 2b)^2}{(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{a - 2b}{a + 2b}.$$

14. $$I = \frac{m^2p^2 + n^2q^2 - n^2p^2 - m^2q^2}{(m + n)^2(p - q)^2}$$

$$I = \frac{p^2(m^2 - n^2) + q^2(n^2 - m^2)}{(m + n)^2(p - q)^2} = \frac{(m^2 - n^2)(p^2 - q^2)}{(m + n)^2(p + q)^2} = \frac{(m - n)(p + q)}{(m + n)(p - q)}.$$

15. $$I = \frac{(x + 1)^4 - (x - 1)^4}{8x^5 + 16x^3 + 8x} = \frac{[(x + 1)^2 + (x - 1)^2][(x + 1)^2 - (x - 1)^2]}{8x(x^4 + 2x^2 + 1)} = \frac{(x^2 + 1) \cdot 2x \cdot 2}{8x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2(x^2 + 1)}.$$

Izračunaj:

16. $$I = \frac{4}{6x - 1} - \frac{3}{6x + 1} + \frac{8x}{36x^2 - 1}.$$

$$I = \frac{24x + 4 - 18x + 3 + 8x}{36x^2 - 1} = \frac{14x + 7}{36x^2 - 1} = \frac{7(2x + 1)}{36x^2 - 1}.$$

17. $$I = \frac{1}{12ab - 4b^2} + \frac{1}{18a^2 + 6ab} + \frac{b}{54a^3 - 6ab^2}.$$

$12ab - 4b^2 = 4b(3a - b)$, $18a^2 + 6ab = 6a(3a + b)$, $54a^3 - 6ab^2 = 6a(9a^2 - b^2)$,

$v = 12ab(9a^2 - b^2)$.

$$I = \frac{3a(3a + b) + 2b(3a - b) + 2b^2}{12ab(9a^2 - b^2)} = \frac{9a(a + b)}{12ab(9a^2 - b^2)} = \frac{3(a + b)}{4b(9a^2 - b^2)}.$$

18. $$I = \left(\frac{16a^2}{16a^2 - 1} - \frac{16a^2}{16a^2 + 8a + 1}\right) : \frac{64a^2}{64a^3 + 1}$$

$$I = \frac{16a^2(4a + 1) - 16a^2(4a - 1)}{(4a + 1)^2(4a - 1)} : \frac{64a^2}{64a^3 + 1} = \frac{32a^2}{(4a + 1)^2(4a - 1)} \cdot \frac{(4a + 1)(16a^2 - 4a + 1)}{64a^2} = \frac{16a^2 - 4a + 1)}{2(16a^2 - 1)}.$$

19. $$I = \frac{16x^4 - 1}{256x^4 - 36x^2} : \frac{8x^2 + 2}{8x + 3} \cdot \left(8x + \frac{2x}{2x - 1}\right).$$

$$I = \frac{16x^4 - 1}{4x^2(64x^2 - 9)} \cdot \frac{8x + 3}{2(4x^2 + 1)} \cdot \frac{16x^2 - 6x}{2x - 1} = \frac{16x^4 - 1}{4x^2(64x^2 - 9)} \cdot \frac{8x + 3}{2(4x^2 + 1)} \cdot \frac{2x(8x - 3)}{2x - 1} = \frac{2x + 1}{4x^2} \cdot x = \frac{2x + 1}{4x}.$$

Pokaži da je

20. $$\left[\frac{x - a}{(x + a)^2} + \frac{x + a}{(x - a)^2}\right] : \left[\frac{1}{(x + a)^2} - \frac{1}{x^2 - a^2} + \frac{1}{(x - a)^2}\right] = 2x.$$

21. $$\frac{\dfrac{a + b}{a - b} - \dfrac{a - b}{a + b}}{1 - \dfrac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}} = \frac{2(a + b)}{a - b}.$$

22. $\frac{2}{1-x^2} : \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{x}.$

23. $\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3} - \frac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3} + \frac{2c}{c^2-a^2} - \frac{3}{a+c} = 0.$

24. $\dfrac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}} = x^2 - y^2.$

25. $\frac{b-7a}{6ab+b^2} - \frac{3a+2b}{18a^2-3ab} - \frac{12a^2-2b^2}{108a^3-3ab^2} + \frac{24a^2+b^2}{36a^2b-b^3} = \frac{18a^2-3ab+5b^2}{b(b^2-36a^2)}.$

26. $\dfrac{1-\frac{8a^2}{(1+a^2)^2}}{\frac{2(1-a^2)^2}{(1+a^2)^2}-1} = 1.$

27. $\left(\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}} + \dfrac{1}{1+\frac{y}{x}} - \dfrac{1}{1-\frac{y}{x}}\right) : \dfrac{1-\frac{x-3y}{x+y}}{\frac{3x+y}{x-y}-3} = 1.$

28. $\left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a}\right)\left(\frac{3}{4a} + \frac{a}{4} - a\right) : \left(\frac{1+a}{2-2a} - \frac{1-a}{2+2a} - \frac{2a^2}{a^2-1}\right)\frac{1-a}{2a} = 3.$

29. $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}}{\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a+b}} : \left[\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}\right] = \frac{a}{b}.$

ISPRAVI U PROŠLOM BROJU:

1. U članku »Ispitivanje strukture kristala rentgenskim zrakama«, Mat. fiz. list br. 1., 1960./61. na str. 4., tiskarskom pogreškom zamijenje su međusobno slike 5. i 6. Pod slikom 5. treba stoga da piše: »Ogibna slika kristalnog praška sulfata«, a pod slikom 6: »Ogibna slika monokromatskih rendgenskih zraka na monokristalu živinog sulfata, koji je oscilirao za vrijeme snimanja oko jedne kristalografske osi«.

2. Na str. 30., 7. redak odozgo desno mjesto Aranđelović I ragutin, Niš, »Svetozar Marković« treba da bude Aranđelović Dragoljub, Svetozarevo, Veličković Dragutin, Niš, »Svetozar Marković«.

JOSIP GOLDBERG
(1885—1960)

U Zagrebu je 15. oktobra umro dr Josip Goldberg, redovni član Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu i sveučilišni profesor u m. Rođen u Sarajevu, polazio je studije na bečkom univerzitetu i završio ih sa doktoratom fizičkih nauka. Služio je kao srednjoškolski profesor u Mostaru, a 1927. dolazi u Zagreb za opservatora na Geofizičkom institutu. Poslije oslobođenja postaje redoviti profesor geofizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. J. Goldberg istakmuo se kao naučni radnik i kao pedagog. U nastavnom radu imao je veoma mnogo uspjeha i tu su došle do izražaja sve njegove vrline. Poznati su njegovi udžbenici fizike i astronomije za srednje škole. Organizirao je studij geofizike tako, da danas u Zagrebu postoji mogućnost posebnog studija meteorologije, seizmologije, oceanografije i drugih grana geofizike. Među najpoznatije njegove naučne radove ubrajaju se oceanografski radovi, gdje se naročito bavio oscilacijama površine morskih zaljeva i jezera tzv. sešime. Jedna od metoda utvrđivanja seša nosi u stručnoj literaturi naziv Goldbergova metoda. Pored toga objavio je niz naučnih radova iz područja meteorologije, fizike i astronomije. Smrću J. Goldberga izgubila je naša nauka kao i prosvjeta jednog od svojih najistaknutijih radnika, no njegovo će ime ostati kao trajan spomen ne samo među njegovim učenicima nego među naučnim radnicima na području geofizike uopće.

Branko Maksić

Matematična križanka

Vinko Potočnik, 3. r. g. Škofja Loka

Vodoravno:

1. Vrednost izraza $z^{\frac{4}{x+y}}$, če x, y in z ustrezajo sistemu enačb: $x + y + z = 227$, $2x + y - z = -124$, $x - y - z = -29$
5. Večji koren enačbe
$$\sqrt[3]{51 - x} - \sqrt[3]{25 - x} = \sqrt[3]{26}$$
6. Volumen pravilne kvadratne piramide s stranskim robom $\sqrt[3]{456}$, ki je naklonjen k osnovki ploskvi za kot 30^0
7. Koordinati temena parabole (x, y), ki jo določa funkcija $y = 6x^2 - 84x + 315$
8. $\frac{28000}{0{,}06} \cdot \frac{10{,}6^7 - 1}{2{,}005^{13} - 3{,}001^{6{,}384} - 1}$ (zaokroženo)
9. Najprej večji, nato manjši koren (absolutna vrednost) enačbe $x^4 - 85x^2 + 324 = 0$
10. $\sqrt[6]{139\,314\,069\,504}$
12. Kub ploščine trikotnika, ki ima oglišča $A\,(2, 2)$, $B\,(20, 4)$, $C\,(10, 10)$
15. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 98^2 + 99^2$
17. Število stranic v mnogokotniku, ki ima 2925 diagonal
19. Rob oktaedra, ki ima volumen $4913\sqrt{2}/3$
20. Maksimum funkcije $y = ax^2 + bx + c$, katere krivulja gre skozi točke
$M_1\,(1, 54)$, $M_2\,(10, 45)$, $M_2\,(13, 6)$
21. Krožni lok s kotom 270^0, če je ploščina krogu včrtanega enakostraničnega trikotnika $63948\sqrt{3}/\pi^2$
22. Najprej polmer večje, nato polmer manjše krogle, katerih prostornini sta v razmerju 8 : 125, vsota polmerov obeh krogel pa je za 4 večja od polmera večje krogle
23. $\sqrt[x]{995{,}4} = 1{,}4122$; $x = ?$
24. Vsota volumna pravilne štiristranične piramide, ki je včrtana enakostraničnemu stožcu z višino $v = 2\sqrt{3}$, in volumna pravilne tristranične piramide, ki je očrtana istemu stožcu (5 natačnih štev.)

Navpično:

1. Vrednost za x, y, z in u, če je:
$x + y + z + u = 48$, $4x - 3y + z = 4$, $y + z - 4u = 8$, $4x + y - z - u = 3$
2. $10^x = 1{,}3366$; $x = ?$
3. Osnovnica trapeza ($c = 52$, $d = 5$, $\alpha = 90^0$), ki tvori ob zavrtitvi okrog stranice d vrtenino z volumnom 16880π
4. Naravni logaritem števila 306,393
5. Stranica kvadrata, ki je včrtan v krožni izsek s polmerom $r = 10$ in središčnim kotom $\alpha = 60^0$, tako da ležita dve oglišči na loku dve pa na polmerih 2 decimalki
9. Najprej večji, nato manjši koren enačbe $x^2 - 1095x + 166896 = 0$
11. Volumen kocke, če je polmer krogle z isto površino $31{,}5\sqrt{6/\pi}$
13. $111^{x-20} = 1\,367\,631$; $x = ?$
14. Volumen kocke, če je njena površina 73,6428

1	2	3		4	▨	5	
6			▨	7			▨
8		▨	9			10	11
12		13			14	▨	
	▨	15				16	
17	18	▨	19		▨	20	
▨	21			▨	22		
23		▨	24				

16. 13. član aritmetičnega niza, če je razlika niza $d = 156$ vsota prvih 20 članov pa 106 260
18. Volumen pokončne tristranične prizme, katere osnovna ploskev meri 420 stranske ploskve pa 50,78 in 112
22. Vrednost izraza $a^4 + 10a^2 + a$, če a zadovoljuje relacijo
$$\left[\left(a^{-2{,}25}\right)^{2/3} + \left(\frac{1}{a}\right)^{1/2} \cdot a^{-1}\right] \cdot \left[\left(a^{-1{,}5}\right)^{-2/3}\right]^{-3/4} = 2$$

Rješenje postati do 25 II. 1961. Na kuverti naznačiti: »Matematična križanka«. Između učenika, koji pravilno riješe križaljku, ždrijebom će se odrediti njih 10 i nagraditi matematičkim knjigama. Rješenje križaljke objavit će se u narednom broju.

Križaljka se ne mora izrezivati; dovoljno je rješenje na posebnom papiru, čitljivo potpisanom.

Mali rječnik: *če* = ako; *določiti* = odrediti; *gre* = ide, prolazi; *krogla* = kugla, lopta; *natančni* = tačan; *očrtani* = opisani; *oglišče* = vrh; *ploskev* = ploha; *pokončen* = uspravan; *rob* = brid, ivica; *skozi* = kroz; *število* = broj; *ustrezati* = zadovoljavati; *včrtani* = upisani; *vrtenina* = rotaciono tijelo; *vsota* = suma.

Rješenje ukrštenice iz br. 1. i nagrađeni rješavaoci

Vodoravno:	*Uspravno:*
2 — 0,80593	1 — 0,10045
6 — 1371	2 — 0,734
8 — 4;3	3 — 8,1
9 — 0,23	4 — 544
10 — 1480	5 — 9380
12 — 48;3	7 — 32
14 — 0,7	10 — 139
15 — 41	11 — 0,75135
17 — 191	13 — 814
19 — 504,4	16 — 1064
21 — 911	18 — 19,31
23 — 66	20 — 461
24 — 83;93	22 — 19
25 — 0,41921	24 — 8;2

Knjigom *Mintaković: Kompleksni brojevi* nagrađeni su:

1. Andrić Pero, 4. r. g. Visoko
2. Brišar Ladislav, 3. b r. g. Jesenice
3. Draganić Damir, 4. c r. g. Slav. Požega
4. Fale Branko, 4. r. g, Celje
5. Marinović Ante, 4. g. r. 7. g. Zagreb
6. Matuha Franjo, 4. r. g. Visoko
7. Stanković Đuro, 4. c r. g. Slav. Požega
8. Šišić Dragoslav, 4, b r. g. Titovo Užice
9. Tomašić Marijan, 4. c r. g. Celje
10. Vučak Štefan, 4. a r. g. Murska Sobota